L3GC/Ing1/Archi GC
13 janvier 2025
Durée 2 heures

# Examen de mathématiques : Probabilités & Statistiques

---

L'utilisation ou la consultation de téléphone est formellement interdite, les téléphones et tout objet connecté (en particulier les montres) doivent être éteints et rangés dans un sac sur le bord de l'amphi. Les documents sont interdits, une feuille A4 manuscrite est toutefois autorisée, ainsi qu'une calculatrice (modèle autorisé aux concours de l'enseignement scolaire) mise en mode examen en début d'épreuve.
Barème indicatif : 6+10+4

---

**Exercice 1 (Cours):** Soit des variables aléatoires $X$, $Y$, $X_i$, $Y_j$ possédant une variance, les $X_i$ ont la même loi, on note $m = \mathbb{E}(X_i)$ et $\sigma^2 = \mathbb{V}\mathrm{ar}\,(X_i)$.

1. Rappeler la définition de la variance d'une variable aléatoire $\mathbb{V}\mathrm{ar}\,(X)$ ainsi que de la covariance $\mathcal{C}\mathrm{ov}\,(X, Y)$.
2. Montrer, en utilisant les propriétés de l'espérance, que pour toute constante réelle $a$, $\mathbb{V}\mathrm{ar}\,(aX) = a^2\mathbb{V}\mathrm{ar}\,(X)$.
3. Montrer que dans le cas où les $(X_i)$ sont indépendantes, $\mathbb{V}\mathrm{ar}\,(\overline{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$, où $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$.
4. Vérifier dans le cas général que $\mathcal{C}\mathrm{ov}\,(X; Y) = \mathcal{C}\mathrm{ov}\,(Y, X)$, que $\mathcal{C}\mathrm{ov}\,(X; Y_1 + Y_2) = \mathcal{C}\mathrm{ov}\,(X; Y_1) + \mathcal{C}\mathrm{ov}\,(X; Y_2)$ et que $\mathcal{C}\mathrm{ov}\,(X; Y) = \mathcal{C}\mathrm{ov}\,\big(X - \mathbb{E}(X), Y - \mathbb{E}(Y)\big)$.
5. On suppose que les $(X_i)$ ne sont pas indépendantes, et que pour tout $i \neq j$, $\mathcal{C}\mathrm{ov}\,(X_i; X_j) = \gamma$. Déterminer $\mathbb{V}\mathrm{ar}\,(\overline{X})$.
6. On suppose que les $(X_i)$ sont indépendantes, que les $(Y_j)$ sont indépendantes et que lorsque $i \neq j$ $X_i$ et $Y_j$ sont indépendantes, enfin que pour tout entier $i$, $\mathcal{C}\mathrm{ov}\,(X_i; Y_i) = \gamma$. Pour simplifier les calculs on suppose les $X_i$ et les $Y_j$ centrées, montrer que $Z = \frac{n}{n-1}(\overline{XY} - \overline{X}.\overline{Y})$ est un estimateur sans biais de $\gamma$.

**Exercice 2 (Lois absolument continues.):** Soit $a, \lambda$ deux réels strictement positifs, $f_\lambda$ la fonction définie par $f_\lambda(t) = at^2e^{-\lambda t}$ si $t \geqslant 0$ et $f_\lambda(t) = 0$ si $t \leqslant 0$. On suppose que $X$ est une variable aléatoire dont la densité est $f_\lambda$. Soit $(X_i)$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi que $X$, on note $\overline{X} = \dfrac{1}{n}\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k\right)$, on pourra admettre que pour tout entier $n$, $I_n = \displaystyle\int_0^{\infty} t^n e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \frac{n!}{\lambda^{n+1}}$, ainsi $I_4 = \frac{24}{\lambda^5}$.

1. Déterminer $a$ en fonction de $\lambda$. Déterminer le maximum de $f_\lambda$.
2. Calculer $\mathbb{E}(X)$ en fonction de $\lambda$.
3. Calculer $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X)$ en fonction de $\lambda$.
4. Déterminer $\mathbb{E}(\overline{X})$ et $\mathbb{V}\mathrm{ar}(\overline{X})$.
5. Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance du paramètre $\lambda$, on rappelle que pour des variables aléatoires de densité $f_\lambda$ la vraisemblance d'une réalisation $x_1, x_2, ..., x_n$ est donnée par $V(\lambda) = f_\lambda(x_1)f_\lambda(x_2)...f_\lambda(x_n)$.
6. Donner une estimation ponctuelle de $\lambda$ pour le jeu de données : 2 ;3 ;3 ;4 ;6 ;9.
7. Soit $x_1, x_2, ..., x_{300}$ les données d'un échantillon modélisé par des variables aléatoires qui suivent une loi de densité $f_\lambda$, dont on ne connaît pas $\lambda$, sachant que $\frac{1}{300}\sum_{i=1}^{300} x_i = 0{,}50$, déterminer une approximation d'un intervalle de confiance à 95 % pour $\lambda$.

**Exercice 3 (Statistiques):** On cherche à étudier la résistance à la compression d'un béton armé, renforcé avec deux hélices de bandes de tissu de verre, collées ensembles par une résine époxy sur la structure métallique. On compare 3 types d'éprouvettes cylindriques :
1) CBO : béton armé sans renforcement,
2) CCV 33 : béton armé renforcé par des bandes de tissu de verre de longueur 110 cm
3) CCV 43 : béton armé renforcé par des bandes de tissu de verre de longueur 150 cm
On obtient les résistances à la compression suivant le type de renforcement pour 3 éprouvettes de chaque type

| Renforcement | | | | Moyenne | Variance des échantillons |
|---|---|---|---|---|---|
| CBO | $x_{11} = 25.70$ | $x_{12} = 20.16$ | $x_{13} = 17.96$ | $\overline{x_1} = 21.27$ | $S_1^2 = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{3}(x_{1k} - \overline{x_1})^2 = 10.604$ |
| CCV33 | $x_{21} = 25.70$ | $x_{22} = 22.92$ | $x_{23} = 20.16$ | $\overline{x_2} = 22.93$ | $S_2^2 = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{3}(x_{2k} - \overline{x_2})^2 = 5.115$ |
| CCV43 | $x_{31} = 24.50$ | $x_{32} = 23.18$ | $x_{33} = 23.45$ | $\overline{x_3} = 23.71$ | $S_3^2 = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{3}(x_{3k} - \overline{x_3})^2 = 0.324$ |

De plus $\overline{x} = \frac{1}{9}\sum_{i,j} x_{ij} = 22,64$ et $S^2 = \frac{1}{9}\sum_{i,j}(x_{ij} - \overline{x})^2 = 6,40$

Après avoir rappelé les hypothèses d'une ANOVA (analyse de la variance) : peut-on affirmer au vu de ces expériences que l'ajout de bandes de tissu de verre modifie la résistance à la compression des bétons.

# Valeur pour une loi de Fisher

Le tableau donne la valeur $\alpha$ telle que $\mathbb{P}(X \leq \alpha) = 95\%$, où $X$ est une variable aléatoire qui suit une loi de Fisher de paramètres $d_1$ et $d_2$, c'est à dire que $X = \frac{\frac{X_1}{d_1}}{\frac{X_2}{d_2}}$ où $X_1 \sim \chi^2(d_1)$ ; $X_2 \sim \chi^2(d_2)$ ; et $X_1$ et $X_2$ sont indépendantes.

| $d_2$ \ $d_1$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 161,45 | 199,50 | 215,71 | 224,58 | 230,16 | 233,99 | 236,77 | 238,88 | 240,54 | 241,88 | 242,98 | 243,91 |
| 2 | 18,51 | 19,00 | 19,16 | 19,25 | 19,30 | 19,33 | 19,35 | 19,37 | 19,38 | 19,40 | 19,40 | 19,41 |
| 3 | 10,13 | 9,55 | 9,28 | 9,12 | 9,01 | 8,94 | 8,89 | 8,85 | 8,81 | 8,79 | 8,76 | 8,74 |
| 4 | 7,71 | 6,94 | 6,59 | 6,39 | 6,26 | 6,16 | 6,09 | 6,04 | 6,00 | 5,96 | 5,94 | 5,91 |
| 5 | 6,61 | 5,79 | 5,41 | 5,19 | 5,05 | 4,95 | 4,88 | 4,82 | 4,77 | 4,74 | 4,70 | 4,68 |
| 6 | 5,99 | 5,14 | 4,76 | 4,53 | 4,39 | 4,28 | 4,21 | 4,15 | 4,10 | 4,06 | 4,03 | 4,00 |
| 7 | 5,59 | 4,74 | 4,35 | 4,12 | 3,97 | 3,87 | 3,79 | 3,73 | 3,68 | 3,64 | 3,60 | 3,57 |
| 8 | 5,32 | 4,46 | 4,07 | 3,84 | 3,69 | 3,58 | 3,50 | 3,44 | 3,39 | 3,35 | 3,31 | 3,28 |
| 9 | 5,12 | 4,26 | 3,86 | 3,63 | 3,48 | 3,37 | 3,29 | 3,23 | 3,18 | 3,14 | 3,10 | 3,07 |
| 10 | 4,96 | 4,10 | 3,71 | 3,48 | 3,33 | 3,22 | 3,14 | 3,07 | 3,02 | 2,98 | 2,94 | 2,91 |
| 11 | 4,84 | 3,98 | 3,59 | 3,36 | 3,20 | 3,09 | 3,01 | 2,95 | 2,90 | 2,85 | 2,82 | 2,79 |
| 12 | 4,75 | 3,89 | 3,49 | 3,26 | 3,11 | 3,00 | 2,91 | 2,85 | 2,80 | 2,75 | 2,72 | 2,69 |
| 13 | 4,67 | 3,81 | 3,41 | 3,18 | 3,03 | 2,92 | 2,83 | 2,77 | 2,71 | 2,67 | 2,63 | 2,60 |
| 14 | 4,60 | 3,74 | 3,34 | 3,11 | 2,96 | 2,85 | 2,76 | 2,70 | 2,65 | 2,60 | 2,57 | 2,53 |
| 15 | 4,54 | 3,68 | 3,29 | 3,06 | 2,90 | 2,79 | 2,71 | 2,64 | 2,59 | 2,54 | 2,51 | 2,48 |
| 16 | 4,49 | 3,63 | 3,24 | 3,01 | 2,85 | 2,74 | 2,66 | 2,59 | 2,54 | 2,49 | 2,46 | 2,42 |
| 17 | 4,45 | 3,59 | 3,20 | 2,96 | 2,81 | 2,70 | 2,61 | 2,55 | 2,49 | 2,45 | 2,41 | 2,38 |
| 18 | 4,41 | 3,55 | 3,16 | 2,93 | 2,77 | 2,66 | 2,58 | 2,51 | 2,46 | 2,41 | 2,37 | 2,34 |
| 19 | 4,38 | 3,52 | 3,13 | 2,90 | 2,74 | 2,63 | 2,54 | 2,48 | 2,42 | 2,38 | 2,34 | 2,31 |
| 20 | 4,35 | 3,49 | 3,10 | 2,87 | 2,71 | 2,60 | 2,51 | 2,45 | 2,39 | 2,35 | 2,31 | 2,28 |
| 21 | 4,32 | 3,47 | 3,07 | 2,84 | 2,68 | 2,57 | 2,49 | 2,42 | 2,37 | 2,32 | 2,28 | 2,25 |
| 22 | 4,30 | 3,44 | 3,05 | 2,82 | 2,66 | 2,55 | 2,46 | 2,40 | 2,34 | 2,30 | 2,26 | 2,23 |
| 23 | 4,28 | 3,42 | 3,03 | 2,80 | 2,64 | 2,53 | 2,44 | 2,37 | 2,32 | 2,27 | 2,24 | 2,20 |
| 24 | 4,26 | 3,40 | 3,01 | 2,78 | 2,62 | 2,51 | 2,42 | 2,36 | 2,30 | 2,25 | 2,22 | 2,18 |
| 25 | 4,24 | 3,39 | 2,99 | 2,76 | 2,60 | 2,49 | 2,40 | 2,34 | 2,28 | 2,24 | 2,20 | 2,16 |
| 26 | 4,23 | 3,37 | 2,98 | 2,74 | 2,59 | 2,47 | 2,39 | 2,32 | 2,27 | 2,22 | 2,18 | 2,15 |
| 27 | 4,21 | 3,35 | 2,96 | 2,73 | 2,57 | 2,46 | 2,37 | 2,31 | 2,25 | 2,20 | 2,17 | 2,13 |
| 28 | 4,20 | 3,34 | 2,95 | 2,71 | 2,56 | 2,45 | 2,36 | 2,29 | 2,24 | 2,19 | 2,15 | 2,12 |
| 29 | 4,18 | 3,33 | 2,93 | 2,70 | 2,55 | 2,43 | 2,35 | 2,28 | 2,22 | 2,18 | 2,14 | 2,10 |
| 30 | 4,17 | 3,32 | 2,92 | 2,69 | 2,53 | 2,42 | 2,33 | 2,27 | 2,21 | 2,16 | 2,13 | 2,09 |
| 31 | 4,16 | 3,30 | 2,91 | 2,68 | 2,52 | 2,41 | 2,32 | 2,25 | 2,20 | 2,15 | 2,11 | 2,08 |
| 32 | 4,15 | 3,29 | 2,90 | 2,67 | 2,51 | 2,40 | 2,31 | 2,24 | 2,19 | 2,14 | 2,10 | 2,07 |
| 33 | 4,14 | 3,28 | 2,89 | 2,66 | 2,50 | 2,39 | 2,30 | 2,23 | 2,18 | 2,13 | 2,09 | 2,06 |
| 34 | 4,13 | 3,28 | 2,88 | 2,65 | 2,49 | 2,38 | 2,29 | 2,23 | 2,17 | 2,12 | 2,08 | 2,05 |
| 35 | 4,12 | 3,27 | 2,87 | 2,64 | 2,49 | 2,37 | 2,29 | 2,22 | 2,16 | 2,11 | 2,07 | 2,04 |
| 36 | 4,11 | 3,26 | 2,87 | 2,63 | 2,48 | 2,36 | 2,28 | 2,21 | 2,15 | 2,11 | 2,07 | 2,03 |
| 37 | 4,11 | 3,25 | 2,86 | 2,63 | 2,47 | 2,36 | 2,27 | 2,20 | 2,14 | 2,10 | 2,06 | 2,02 |
| 38 | 4,10 | 3,24 | 2,85 | 2,62 | 2,46 | 2,35 | 2,26 | 2,19 | 2,14 | 2,09 | 2,05 | 2,02 |
| 39 | 4,09 | 3,24 | 2,85 | 2,61 | 2,46 | 2,34 | 2,26 | 2,19 | 2,13 | 2,08 | 2,04 | 2,01 |
| 40 | 4,08 | 3,23 | 2,84 | 2,61 | 2,45 | 2,34 | 2,25 | 2,18 | 2,12 | 2,08 | 2,04 | 2,00 |
| 41 | 4,08 | 3,23 | 2,83 | 2,60 | 2,44 | 2,33 | 2,24 | 2,17 | 2,12 | 2,07 | 2,03 | 2,00 |
| 42 | 4,07 | 3,22 | 2,83 | 2,59 | 2,44 | 2,32 | 2,24 | 2,17 | 2,11 | 2,06 | 2,03 | 1,99 |
| 43 | 4,07 | 3,21 | 2,82 | 2,59 | 2,43 | 2,32 | 2,23 | 2,16 | 2,11 | 2,06 | 2,02 | 1,99 |
| 44 | 4,06 | 3,21 | 2,82 | 2,58 | 2,43 | 2,31 | 2,23 | 2,16 | 2,10 | 2,05 | 2,01 | 1,98 |
| 45 | 4,06 | 3,20 | 2,81 | 2,58 | 2,42 | 2,31 | 2,22 | 2,15 | 2,10 | 2,05 | 2,01 | 1,97 |
| 46 | 4,05 | 3,20 | 2,81 | 2,57 | 2,42 | 2,30 | 2,22 | 2,15 | 2,09 | 2,04 | 2,00 | 1,97 |
| 47 | 4,05 | 3,20 | 2,80 | 2,57 | 2,41 | 2,30 | 2,21 | 2,14 | 2,09 | 2,04 | 2,00 | 1,96 |

Le tableau ci-contre donne la valeur de $t$ où la fonction de répartition est égal à $\alpha$. Par exemple si $X$ suit une loi de Student à 10 degrés de libertés $P(X \leq 2,76) = 0,99$.

| Lois \ $\alpha$ | 0,05 | 0,9 | 0,95 | 0,975 | 0,99 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\mathcal{N}(0;1)$ | -1,64 | 1,28 | 1,64 | 1,96 | 2,33 |
| $\mathcal{S}(4)$ | -2,13 | 1,53 | 2,13 | 2,77 | 3,75 |
| $\mathcal{S}(9)$ | -1,83 | 1,38 | 1,83 | 2,26 | 2,82 |
| $\mathcal{S}(10)$ | -1,81 | 1,37 | 1,81 | 2,23 | 2,76 |
| $\mathcal{S}(11)$ | -1,80 | 1,36 | 1,80 | 2,20 | 2,72 |
| $\chi^2(10)$ | 3,94 | 16,0 | 18,3 | 20,5 | 23,2 |
| $\chi^2(11)$ | 4,57 | 13,3 | 19,7 | 21,9 | 24,7 |