Archi 2024

**Exo 1** : $\mathbb{E}(\overline{X}) = \mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right) \underset{\uparrow}{=} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}(X_k) \underset{\uparrow}{=} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mu = \frac{1}{n} n\mu = \mu$.

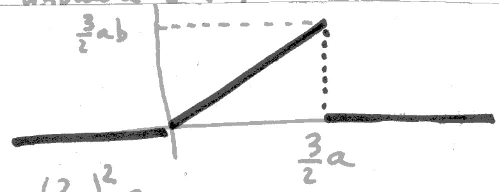
linéarité de $\mathbb{E}$    espérance d'une loi normale $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$

$\mathrm{Var}(\overline{X}) = \frac{1}{n^2}\mathrm{var}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) \underset{\uparrow}{=} \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{var}(X_k) \underset{\uparrow}{=} \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\sigma^2 = \frac{1}{n^2}n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$.

indépendance    variance d'une loi normale $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$

**1.2** : $\frac{(n-1)\hat{S}^2}{\sigma^2} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{X_k - \overline{X}}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(n-1)$

$Z \sim \mathcal{T}(n-1)$



**Exo 2** : **2.1** $P(X \in \mathbb{R}) = 1 = \int_0^{\frac{3}{2}a} bt\,dt = \frac{b}{2}\left(\frac{3}{2}a\right)^2 = \frac{9a^2b}{8}$    $b = \left(\frac{2}{3a}\right)^2 2$

**2.2**. $\mathbb{E}(X) = \int_0^{\frac{3}{2}a} bt^2\,dt = \frac{b}{3}\left(\frac{3}{2}a\right)^3 = \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3a}\right)^2\left(\frac{3a}{2}\right)^3 = \frac{2}{3}\frac{3a}{2} = a$    $\left(\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2\right.$

**2.3** : $\mathrm{Var}(X)$. $\mathbb{E}(X^2) = \int_0^{3/2 a} bt^3\,dt = \frac{b}{4}\left(\frac{3a}{2}\right)^4 = \frac{1}{4}2\left(\frac{2}{3a}\right)^2\left(\frac{3a}{2}\right)^4 = \frac{1}{2}\left(\frac{3a}{2}\right)^2 = \frac{9a^2}{8}$ $\Big\} = \frac{9}{8}a^2 - a^2 = \frac{a^2}{8}$.

**2.4** : $\mathbb{E}(\overline{X}) = a$    $\mathrm{var}(\overline{X}) = \frac{1}{n}\mathrm{Var}(X) = \frac{a^2}{8n}$

**2.5** : ~~Soit~~ $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

**2.5** : $V(a) = f_a(x_1) f_a(x_2) \cdots f_a(x_n)$ $\begin{cases} = 0 \text{ si l'un des } x_i \text{ n'appartient pas à } \left[0; \frac{3a}{2}\right] \\ = b^n x_1 x_2 \cdots x_n \text{ si tous les } x_i \text{ appartient à } \left[0; \frac{3a}{2}\right] \end{cases}$

La vraisemblance est maximal si $b$ est le plus grand possible, c'est à dire $a$ le plus petit possible avec tous les $x_i \in \left[0; \frac{3a}{2}\right]$.

$\frac{3}{2}\hat{a} = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$ donc $\hat{a} = \frac{2}{3}\max(X_1, \dots, X_n)$.

**2.6** : 2 estimations possible $\overline{X}(\omega) = \frac{5+12+15+18+19+21}{6} = 15$    $\hat{a}(\omega) = \frac{2}{3}21 = 14$.

**Exo 3** On suppose que $X_i \sim \mathcal{N}(\mu_A; \alpha^2)$ $Y_j \sim \mathcal{N}(\mu_B; \alpha^2)$ $X_i, Y_j$ indépendant

**3.2** : $H_0 : \mu_A = \mu_B$    $H_1 : \mu_A > \mu_B$    Sous $H_0$ $Z = \dfrac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{\frac{1}{5}+\frac{1}{6}}\sqrt{\frac{5\hat{S}_A^2 + 6\hat{S}_B^2}{5+6-2}}} \sim \mathcal{T}(5+6-2)$

Forme du test   Si $Z > s$ on conclut $H_1$
Si $Z < s$ ——— $H_0$

Si $H_0$ est vrai $P(Z > s) = 5\%$ donc $s = 1{,}83$ et $Z(\omega) = 1{,}22$

On ne peut pas rejeter $H_0$, on accepte donc l'hypothèse $H_0$ que $\mu_A = \mu_B$.

**3.3** : $\overline{X}(\omega) = \frac{5\times 34 + 6\times 32}{11} = 32{,}9$    $S^2(\omega) = \frac{5\times 1162 + 6\times 1030}{11} - \overline{X}(\omega)^2 = 7{,}59$    $\hat{S}^2(\omega) = 8{,}349 = 2{,}89^2$

$T = \sqrt{11}\,\frac{\overline{X} - \mu}{\hat{S}} \sim \mathcal{T}(10)$ donc $P(-2{,}23 \le T \le 2{,}23) = 95\%$ on en déduit $I_{95} = \left[\overline{X} - \frac{2{,}23\,\hat{S}}{\sqrt{11}}; \overline{X} + \frac{2{,}23\,\hat{S}}{\sqrt{11}}\right]$

on obtient pour $\mu$ l'intervalle de confiance $I_{95} = [30{,}95; 34{,}85]$

$\frac{10.\hat{S}^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(10)$ donc $P\left(\frac{10.\hat{S}^2}{\sigma^2} < 3{,}94\right) = 5\% = P\left(\sigma^2 > \frac{10.\hat{S}^2}{3{,}94}\right)$    $J_{95} = [0; 21{,}2]$

on obtient deux intervalles possibles pour $\sigma^2$ : $J_{95} = [0; 21{,}2]$ ou $J_{95} = [4{,}56; +\infty[$

**3.4** : On peut effectuer un test AnovA, hypothèse homoscedasticité, indépendance et normalité des résultats   $H_0 : \mu_A = \mu_B = \mu_C = \mu_D$   $H_1$ deux des moyenne sont $\neq$.

$\overline{Y}_0 = \frac{5\times 34 + 6\times 32 + 5\times 33 + 6\times 29}{22} = 31{,}86$

Sous $H_0$ $F = \dfrac{\frac{SSE}{3}}{\frac{SSR}{18}} \sim \mathcal{F}(3; 18)$

$SSE = 5(34 - \overline{X}(\omega))^2 + 6(32 - \overline{X}(\omega))^2 + 5(33 - \overline{X}(\omega))^2 + 6\times(30 - \overline{X}(\omega))^2 = 78{,}59$

$SSR = 5\times 6 + 6\times 6 + 5\times 6 + 6\times 6 = 136$

D'où $F(\omega) = \frac{78{,}59}{3}\times\frac{18}{136} = 3{,}47 > 3{,}16$. Au risque 5% on peut donc rejeter $H_0$ (Mais pas au risque 1%) Il est probable que les 4 betons n'aient pas la même resistance à la compression.