Ing1/Archi GC
26 janvier 2024
Durée 1,5 heures

Examen de mathématiques : Probabilités & Statistiques

L'utilisation ou la consultation de téléphone est formellement interdite, les téléphones et tout objet connecté doivent être rangés dans un sac et éteints. Les documents sont interdits, une feuille A4 manuscrite est toutefois autorisée, ainsi qu'une calculatrice (modèle autorisé aux concours de l'enseignement scolaire) mise en mode examen en début d'épreuve.
Barème indicatif : 3+8+9

Exercice 1 (Cours): Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes de loi normale de paramètres (μ, σ^2).

1. Redémontrer les formules de l'espérance et de la variance de la variable aléatoire $\overline{X} = \dfrac{1}{n}\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k\right)$.
2. Rappeler, sans les démontrer, les lois de $T = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{X_k - \overline{X}}{\sigma}\right)^2$ puis de $Z = \sqrt{n}\dfrac{\overline{X} - \mu}{\hat{S}}$ où $\hat{S}^2 = \dfrac{1}{n-1}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(X_k - \overline{X}\right)^2$.

Exercice 2 (Lois absolument continues.): Soit a, b deux réels positifs, f_a la fonction définie par $f_a(t) = bt$ si $t \in [0; \frac{3}{2}a]$ et $f_a(t) = 0$ sinon. On suppose que X est une variable aléatoire dont la densité est f_a. Soit (X_i) une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi que X, on note $\overline{X} = \dfrac{1}{n}\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k\right)$.

1. Représenter rapidement f_a, déterminer b en fonction de a.
2. Calculer $\mathbb{E}(X)$ en fonction de a.
3. Calculer $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X)$ en fonction de a.
4. Déterminer $\mathbb{E}(\overline{X})$ et $\mathbb{V}\mathrm{ar}(\overline{X})$.
5. Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance $\hat{a}$ du paramètre a.
6. Proposer deux estimations ponctuelles de a pour l'échantillon : 5-12-15-18-19-21.

Exercice 3: On cherche à comparer la résistance à la compression de deux bétons ayant des formulations légèrement différentes pour cela on casse des éprouvettes cylindriques de différentes gâchées, les résistances à la compression sont données en MPa, on suppose que les résultats obtenus suivent des lois normales.

— Béton A : 35-32-38-34-31 $\left(m_A = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} m_A^{(i)} = 34\,;\ \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}\left(m_A^{(i)}\right)^2 = 1162\,;\ \sigma_A^2 = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}(m_A^{(i)} - m_A)^2 = 6\right)$

— Béton B : 29-32-35-35-29-32 $\left(m_B = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} m_B^{(i)} = 32\,;\ \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6}\left(m_B^{(i)}\right)^2 = 1030\,;\ \sigma_B^2 = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6}(m_B^{(i)} - m_B)^2 = 6\right)$

1. On cherche à savoir si les résultats sont suffisants pour affirmer que le béton A possède une résistance à la compression moyenne plus élevée que le béton B, proposer un modèle en précisant bien vos hypothèses.
2. Construire un test statistique pour répondre à la question précédente et effectuer le test.
3. On suppose dans cette question que les bétons A et B ont la même résistance à la compression,
   (a) Estimer dans ce cas la moyenne et la variance de la résistance à la compression de la population.
   (b) Construire un intervalle de confiance à 95% de la résistance moyenne à la compression de ces bétons.
   (c) Construire un intervalle de confiance à 95% de la variance de la résistance à la compression de ces bétons.
4. Deux autres bétons sont étudiés, peut-on affirmer que les bétons A, B, C et D n'ont pas tous la même résistance moyenne à la compression, on précisera et on critiquera les hypothèses faites.
   — Béton C : 34-31-37-33-30 $\left(m_C = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} m_C^{(i)} = 33\,;\ \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}\left(m_C^{(i)}\right)^2 = 1095\,;\ \sigma_C^2 = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}(m_C^{(i)} - m_C)^2 = 6\right)$
   — Béton D : 26-29-32-32-26-29 $\left(m_D = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} m_D^{(i)} = 29\,;\ \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6}\left(m_D^{(i)}\right)^2 = 847\,;\ \sigma_D^2 = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6}(m_D^{(i)} - m_D)^2 = 6\right)$

Le tableau ci-contre donne la valeur de t où la fonction de répartition est égal à α. Par exemple si X suit une loi de Student à 12 degrés de libertés $P(X \leq 2,68) = 0,99$.

Lois \ α	0,05	0,9	0,95	0,975	0,99
$\mathcal{N}(0;1)$	-1,64	1,28	1,64	1,96	2,33
$\mathcal{S}(4)$	-2,13	1,53	2,13	2,77	3,75
$\mathcal{S}(9)$	-1,83	1,38	1,83	2,26	2,82
$\mathcal{S}(10)$	-1,81	1,37	1,81	2,23	2,76
$\mathcal{S}(11)$	-1,80	1,36	1,80	2,20	2,72
$\chi^2(10)$	3,94	16,0	18,3	20,5	23,2
$\chi^2(11)$	4,57	13,3	19,7	21,9	24,7
$\mathcal{F}(3;18)$	0,12	2,41	3,16	3,95	5,09