L3 GC - Ing1 GC
19 janvier 2024
Durée 1,5 heures

Examen de mathématiques : Probabilités & Statistiques

L'utilisation ou la consultation de téléphone est formellement interdite, les téléphones et tout objet connecté doivent être rangés dans un sac fermé et éteints. Les documents sont interdits, une feuille A4 manuscrite est toutefois autorisée, ainsi qu'une calculatrice (modèle autorisé aux concours de l'enseignement scolaire) mise en mode examen en début d'épreuve.
Au verso se trouve un tableau donnant les valeurs de certaines fonctions de répartitions.
On rendra les exercices 1 et 2 sur une copie et l'exercice 3 sur une autre copie.
Barème indicatif : 3+8+9

Exercice 1 (Cours): Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre p.

1. Redémontrer les formules donnant l'espérance et la variance de X_1.
2. Redémontrer les formules donnant l'espérance et la variance de la variable aléatoire $\overline{X} = \dfrac{1}{n}\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k\right)$.
3. Pour $n = 400$ et $p = \frac{1}{5}$, de quelle loi, la loi de $\overline{X}$ est-elle proche ?

Exercice 2 (Couples de variables aléatoires):

Soit $a > 2$ et $(X;Y)$ un couple de variables aléatoires de loi uniforme sur le triangle $\mathcal{T} = (OAB)$ avec $O = (0,0)$, $A = (a,0)$ et $B = (0,1)$ c'est-à-dire que la densité du couple (X,Y) est donné par la fonction $f(x;y) = K$ si (x,y) se trouve dans le triangle $\mathcal{T}$, et 0 sinon, où K est une constante qui dépend de a.

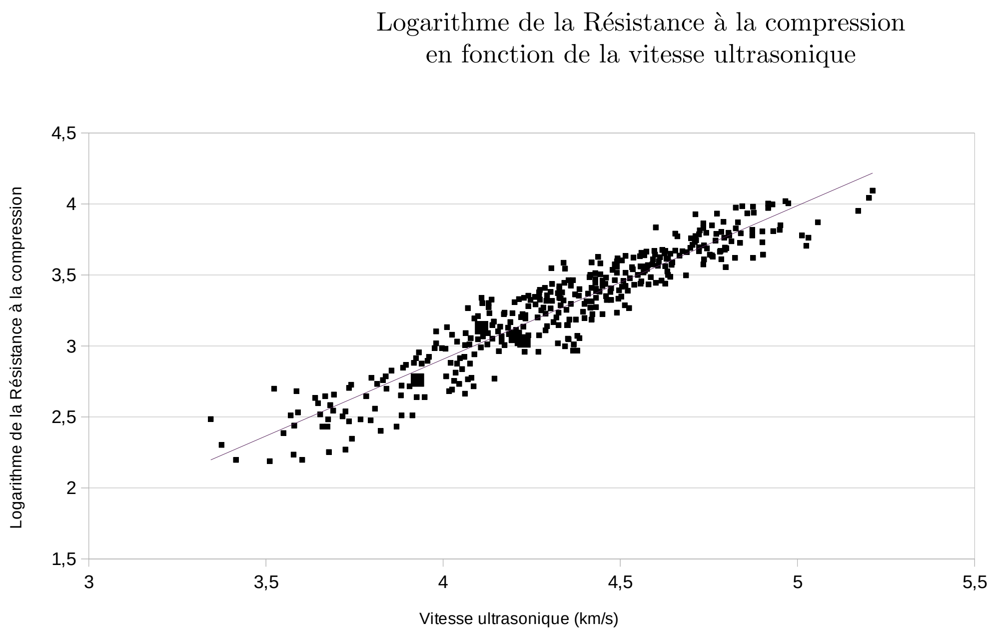
1. Représenter le triangle $\mathcal{T}$. Quelle est son aire ?
2. Déterminer K en fonction de a.
3. Déterminer l'équation de la droite (AB).
4. Démontrer que X et Y ne sont pas indépendantes.
5. Montrer que la densité de la variable aléatoire X est $f_X(x) = \frac{2}{a^2}(a - x)$ si $x \in [0;a]$ et 0 sinon.
6. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}\text{ar}(X)$.
7. Calculer $\mathbb{P}(X > 1 | Y > \frac{1}{2})$, on pourra raisonner à l'aide d'intégrales ou à l'aide d'aires.

Exercice 3: Il existe différentes façons d'évaluer la qualité d'un béton, sans avoir à l'endommager, parmi elles l'étude de la vitesse de propagation d'une onde ultrasonique. Pour un grand nombre d'éprouvettes de bétons normaux, de formulation et d'age différents, on effectue deux essais un premier non destructif de mesure de la vitesse ultrasonique en km/s, puis un second destructif, par écrasement d'éprouvette en MPa. Les données expérimentales sont représentées au verso. On a représenté en abscisse la vitesse ultrasonique mesurée, et en ordonnée le logarithme népérien de la résistance à la compression obtenu par écrasement. En outre la vitesse moyenne des différents essais est de $\bar{x} = 4,343km/s$, et l'écart type des différentes vitesses est de $0,3634km/s$. On utilise le modèle suivant : les vitesses ultrasoniques sont déterministes, et le logarithme népérien des résistances sont entachées d'erreurs aléatoires, normales, centrées, indépendantes les unes des autres, et de même variance.

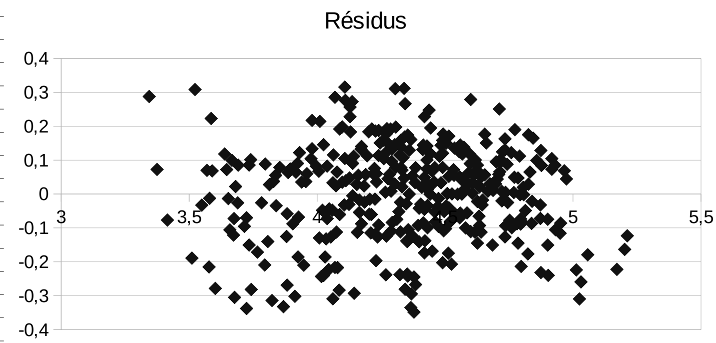
1. Que pensez-vous du modèle ?
2. Peut-on faire l'hypothèse que la résistance à la compression et la vitesse ultrasonique soient non corrélées ($\beta_1 = 0$) ?
   Expliquer le sens de la case

Précision F
6,4234E-177

3. Donner un intervalle de confiance au niveau 95% pour le coefficient directeur de la droite de régression du modèle.
4. Quelle est l'équation de la droite de régression. Comment peut-on en déduire une formule approximative donnant la résistance à la compression moyenne en fonction de la vitesse ultrasonique
5. Donner un intervalle de confiance au niveau 95% pour l'espérance de la résistance à la compression d'un béton dont la vitesse supersonique serait $4km/s$.
6. Donner un intervalle de confiance approximatif au niveau 95% de la résistance à la compression d'une nouvelle éprouvette pour un béton dont la vitesse supersonique est de $4km/s$.



Régression						
Modèle de régre	Linéaire					
Sortie DROITEREG brute						
1,082	-1,420					
0,020	0,087					
0,889	0,139					
2936,762	366,000					
56,712	7,068					
Statistiques de régression						
R^2	0,889					
Erreur type	0,139					
Nombre de varia	1,000					
Observations	369,000					
R^2 ajusté	0,889					
Analyse de la Variance (ANOVA)						
	df	SS	MS	F	Précision F	
Régression	1,000	56,712	56,712	2936,762	6,4234E-177	
Résidu	366,000	7,068	0,019			
Total	367,000	63,780				
Niveau de confia	0,950					
	Coefficients	Erreur type	Statistique de Student	Valeur P	Inférieur 95%	Supérieur 95%
Intercepter	-1,420	0,087	-16,325	2,13656E-45	-1,591	-1,249
X1	1,082	0,020	54,192	6,4234E-177	1,042	1,121



Le tableau ci-contre donne la valeur de t où la fonction de répartition est égal à α. Par exemple si X suit une loi de Student à 12 degrés de libertés $P(X \leq 2,68) = 0,99$.

Lois \ α	0,05	0,9	0,95	0,975	0,99
$\mathcal{N}(0;1)$	-1,64	1,28	1,64	1,96	2,33
$\mathcal{S}(4)$	-2,13	1,53	2,13	2,77	3,75
$\mathcal{S}(10)$	-1,81	1,37	1,81	2,23	2,76
$\mathcal{S}(11)$	-1,80	1,36	1,80	2,20	2,72
$\mathcal{S}(12)$	-1,78	1,36	1,78	2,18	2,68
$\mathcal{S}(n)$ pour $n > 100$	-1,64	1,28	1,64	1,96	2,33
$\chi^2(4)$	0.71	7.78	9.49	11.14	13.28
$\chi^2(5)$	1,15	9,24	11,07	12,83	15,09