Examen de Proba - Stat. 2022/2023

Exo 1 : on sait que $\mathbb{E}(aX+b) = a\,\mathbb{E}(X)+b$

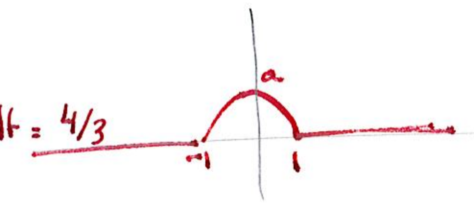
et si les X_i sont indépendantes $\mathrm{Var}(\sum X_i + b) = \sum \mathrm{Var}(X_i)$ et $\mathrm{Var}(aX) = a^2 \mathrm{Var}(X)$

$$\mathbb{E}(Z) = \frac{1}{\sqrt{n}\,\sigma}\,\mathbb{E}\Big(\sum_{k=1}^{n} X_k - nm\Big) = \frac{1}{\sqrt{n}\,\sigma}\Big(\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}(X_k) - nm\Big) = \frac{1}{\sqrt{n}\,\sigma}(nm - nm) = 0.$$

$$\mathrm{Var}(Z) = \frac{1}{n\sigma^2}\,\mathrm{Var}\Big(\sum_{k=1}^{n} X_k - nm\Big) = \frac{1}{n\sigma^2}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Var}(X_k) = \frac{n\sigma^2}{n\sigma^2} = 1.$$

Si de plus les X_k suivent une loi normale alors $Z \sim \mathcal{N}(0;1)$

Exo 2 : $f_a(t) = a(1-t^2)$ si $t \in [-1;1]$ et $f_a(t) = 0$ sinon



$\int_{-\infty}^{+\infty} f_a(t)\,dt = P(X \in \mathbb{R}) = 1$ donc $\int_{-1}^{1} a(1-t^2)\,dt = 1$ or $\int_{-1}^{1}(1-t^2)\,dt = 4/3$

donc $a = \frac{3}{4}$. $\quad \mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t\, f_a(t)\,dt = \frac{3}{4}\int_{-1}^{1} t - t^3\,dt = 0$

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \mathbb{E}(X^2) = \frac{3}{4}\int_{-1}^{1} t^2 - t^4\,dt = \frac{3}{4}\Big(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5}\Big) = \frac{3}{2}\cdot\frac{2}{15} = \frac{1}{5}.$$

$F_X(t) = 0$ si $t \leq -1$ et $F_X(t) = 1$ si $t \geq 1$.

F_X Pour $x \in]-1,1[$ $\quad F_X(x) = P(X \leq x) = \frac{3}{4}\int_{-1}^{x} 1 - t^2\,dt = \frac{3}{4}\Big[t - \frac{t^3}{3}\Big]_{-1}^{x} = \frac{3}{4}\Big(x - \frac{x^3}{3} + 1 - \frac{1}{3}\Big) = \frac{1}{4}(3x - x^3) + \frac{1}{2}$

6) $P(-\alpha \leq X < \alpha) = F_X(\alpha) - F_X(-\alpha) = \frac{1}{2}(3\alpha - \alpha^3)$

on cherche en tatonnant un α tq $\frac{1}{2}(3\alpha - \alpha^3) = 0{,}95$

$\frac{1}{2}(3 \times 0{,}81 - 0{,}81^3) \simeq 0{,}9493$ donc $\alpha = 0{,}81$ convient.

Exo 3 : $\hat{S}^2(\omega) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{11}(d_i - m)^2 = \frac{12\,s^2}{11} \simeq 41{,}93$ $\qquad \hat{S}(\omega) = \sqrt{\frac{12}{11}}\,s \simeq 6{,}47$ est un estimateur de σ.

3.2 : $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum X_i$ d'après un résultat du cours

$Z = \frac{\bar{X} - m}{\hat{S}}\cdot\sqrt{n}$ suit une loi de Student à $n-1$ degrés de liberté.

$P\Big(-2{,}2 \leq \frac{\bar{X}-m}{\hat{S}}\sqrt{n} \leq 2{,}2\Big) = 95\%$ donc $P\Big(m \in \Big[\bar{X} - \frac{2{,}2}{\sqrt{12}}\hat{S}\,;\ \bar{X} + \frac{2{,}2}{\sqrt{12}}\hat{S}\Big]\Big) = 95\%$

$$I_{95} = \Big[63 - \frac{2{,}2}{\sqrt{12}}6{,}47\ ;\ 63 + \frac{2{,}2}{\sqrt{12}}6{,}48\Big] = [58{,}89\ ;\ 67{,}11]$$

3.3 : Posons $H_0 : m = 70$ $\quad H_1 : m < 70$ $\quad$ Forme du test : | Si $\frac{\bar{X}-70}{\hat{S}}\sqrt{12} <$ seuil alors H_1. Si $\frac{\bar{X}-70}{\hat{S}}\sqrt{12} >$ seuil alors H_0

Sous H_0 : $\quad \frac{\bar{X}-70}{\hat{S}}\sqrt{12} \sim \mathcal{T}(11)$

Pour un test au niveau 95% $P\Big(\frac{\bar{X}-70}{\hat{S}}\sqrt{12} < \text{seuil}\Big) = 5\%$ donc seuil $= 1{,}80$

Calculons $\frac{\bar{X}(\omega) - 70}{\hat{S}(\omega)}\sqrt{12} = -3{,}75 \ll -1{,}80$ on conclut H_1.

La différence est donc significative, au risque 5% on peut assurer que $\mu < 70$.

3.4 : Si on fait l'hypothèse que le diamètre suit une loi $\mathcal{N}(m; \hat{S}^2_{(\omega)})$ on veut que $P(X > d) = 10^{-8}$

$P\Big(\frac{X-m}{\hat{S}} > \frac{d-m}{\hat{S}}\Big)$ $\qquad$ on a alors $d = m + 5{,}61\,\hat{S}(\omega) \simeq 99{,}3$

une maille de l'ordre de 99 devrait convenir mais nous avons remplacé μ par m et σ^2 par $\hat{S}^2$ le calcul est donc juste un ordre de grandeur, de plus nous étudions des cas très rares l'hypothèse de loi normale prend alors un rôle primordiale, une loi même proche pouvant donner des résultats très éloignés.

Exercice 4 :

Lorsque l'on regarde la résistance à la compression fonction de l'indice de rebondissement. on remarque que les résidus ne sont pas répartis de façon homogène plutot positif pour i petit et i grand et plutot négatif pour i moyen.

alors qu'ils sont plus plus homogènes dans le deuxième tableau log / log.

4.2. Si ils étaient indépendants dans le modèle $R = \beta_0 + \beta_1 i + \varepsilon_i$ on aurait $\beta_1 = 0$. or Si $\beta_1 = 0$ la valeur p vaut $6{,}69 \cdot 10^{-35}$ c'est à dire sous l'hypothèse $\beta_1 = 0$ la probabilité d'obtenir un résultat comme celui obtenu ou plus éloigné est égale à $6{,}69 \cdot 10^{-35}$, donc l'indépendance n'est pas envisageable.

4.3 : $\log R = -4{,}48 + 2{,}16 \log i$ est la droite de regression du modèle log-log.

4.4 : $I_{95} = [2{,}03\ ;\ 2{,}29]$ $\qquad T_n = \sqrt{51}\,\frac{\hat{y}_{n+1} - y_{n+1}}{\hat{\sigma}\sqrt{1 + \big(\frac{x_{n+1} - \bar{x}}{\sigma_x}\big)^2}} \sim \mathcal{T}(49)$ $\qquad \hat{\sigma}^2 = 0{,}012$, $\sigma_x^2 = 0{,}054$, $\bar{x} = 3{,}65$

4.5 : $y = \ln R \quad x = \ln i$

$\hat{y}_{n+1} \simeq -4{,}48 + 2{,}16\ln(60) \simeq 4{,}36$

$$I_{95} = \Big[\hat{y}_{n+1} - \frac{2{,}01}{\sqrt{51}}\hat{\sigma}\sqrt{1 + \frac{(\ln(60) - 3{,}65)^2}{0{,}054}}\ ;\ \hat{y}_{n+1} + \frac{2{,}01}{\sqrt{51}}\hat{\sigma}\sqrt{\dots}\Big] = [4{,}293\ ;\ 4{,}426]$$

Pour revenir à un intervalle de confiance sur la résistance, on prend l'exponentielle $\tilde{I}_{95} = [e^{4{,}283}\ ;\ e^{4{,}426}] = [73{,}21\ ;\ 83{,}64]$

4.6 : A la variabilité dûe à l'incertitude de la droite de regression (c'est à dire les écarts entre $\hat{\beta}_0$ et β_0 et $\hat{\beta}_1$ et β_1) une estimation de la variance correspondante est $\frac{\hat{\sigma}^2}{51}\Big(1 + \Big(\frac{x_{n+1} - \bar{x}}{\sigma_x}\Big)^2\Big)$ s'ajoute la variabilité du à la nouvelle expérience dont la variance estimée est $\hat{\sigma}$, les deux variabilitées étant indépendantes leur variance s'ajoute : variance totale $= \hat{\sigma}^2\Big(1 + \frac{1}{51}\Big(1 + \Big(\frac{x_{n+1} - \bar{x}}{\sigma_x}\Big)^2\Big)\Big)$, les lois étant soient normale soit proche d'une loi normale ($\mathcal{T}(49)$) on obtient comme intervalle de confiance $J_{95} = [4{,}36 - 2\sqrt{v_{\text{total}}}\ ;\ 4{,}36 + 2\sqrt{v_{\text{total}}}] = [4{,}131\ ;\ 4{,}589]$

Puis pour revenir à un intervalle de confiance on prend l'exponentiel.

$\tilde{J}_{95} \simeq [e^{4{,}131}\ ;\ e^{4{,}589}] = [62{,}24\ ;\ 98{,}40]$