L3 GC - Ing1 GC
13 janvier 2023
Durée 2 heures

Examen de mathématiques : Probabilités & Statistiques

L'utilisation ou la consultation de téléphone est formellement interdite, les téléphones doivent être rangés dans un sac et éteints. Les documents sont interdits, une feuille A4 manuscrite est toutefois autorisée, ainsi qu'une calculatrice (modèle autorisé aux concours de l'enseignement scolaire) mise en mode examen en début d'épreuve.
Barème indicatif : 2+6+6+6

Exercice 1 (Cours): Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes de même espérance m et de même variance σ^2, déterminer l'espérance et la variance de la variable aléatoire $Z = \dfrac{\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) - nm}{\sqrt{n}\ \sigma}$. Quelle est la particularité supplémentaire si les X_i suivent des lois normales ?

Exercice 2 (Lois absolument continues.): Soit a un réel positif, f_a la fonction définie par $f_a(t) = a(1-t^2)$ si $t \in [-1;+1]$ et $f_a(t) = 0$ sinon. On suppose que X est une variable aléatoire dont la densité est f_a.

1. Représenter rapidement f_a
2. Déterminer a.
3. Calculer $\mathbb{E}(X)$.
4. Calculer $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X)$.
5. Déterminer $F_X(t)$ la fonction de répartition de X.
6. Déterminer une valeur approchée de α avec deux décimales où α est tel que $P(|X| \leq \alpha) = 0,95$.

Exercice 3: Lors d'une étude granulométrique de sédiments, on a étudié un échantillon de 12 grains, on fait l'hypothèse que les diamètres des grains suivent une loi normale de paramètres μ et σ^2, on note m la moyenne des diamètres en microns et s l'écart type de l'échantillon en micron. On donnera des valeurs approchées à 10^{-2} près des différents résultats demandés.

$$m = \frac{1}{12}\sum_{i=1}^{12} \mathrm{d}_i = 63 \qquad\qquad s = \sqrt{\frac{1}{12}\sum_{i=1}^{12}(d_i - m)^2} = 6,2$$

1. Estimer la variance des diamètres de la population σ^2.
2. Estimer le diamètre moyen à l'aide d'un intervalle de confiance symétrique de niveau 95%.
3. Peut-on au vu de cet échantillon, garantir que le diamètre moyen des grains est inférieur à 70 microns
4. On voudrait déterminer le diamètre d'un tamis capable de retenir de l'ordre de 1 grain sur 100 millions, proposez une méthode et critiquez la.

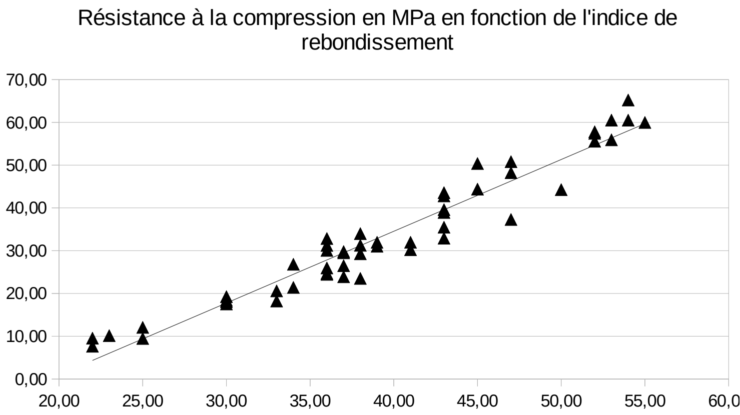
Exercice 4: Il existe différentes façons d'évaluer la qualité d'un béton sans avoir à l'endomager, parmi elles l'utilisation d'un scléromètre dont le principe de base est que le rebond d'une masse élastique dépend de la dureté de la surface sur laquelle frappe la masse. Sous certaines conditions expérimentales bien précises on cherche à étalonner un scléromètre pour cela un expérimentateur compare les rebonds d'un certain nombre de bétons dont les granulats sont composés de calcaire concassé, avec la résistance à la compression mesurée sur cylindre par écrasement. Les résultats sont donnés au verso.

1. Pourquoi semble-t-il plus judicieux de prendre comme modèle le logarithme de la résistance à la compression en fonction du logarithme de l'indice de rebondissement que directement la résistance à la compression en fonction de l'indice de rebondissement ? Dans la suite de l'exercice on ne considère que ce modèle log-log qui se trouve en bas de la page.
2. Peut-on faire l'hypothèse que la résistance à la compression et l'indice de rebondissement sont indépendants ?
3. Quelle est l'équation de la droite de régression du modèle log-log.
4. Donner un intervalle de confiance au niveau 95% pour le coefficient directeur de la droite de régression.
5. Donner un intervalle de confiance au niveau 95% pour l'espérance de la résistance à la compression d'un béton dont l'indice de rebondissement serait 60.
6. Donner un intervalle de confiance approximatif au niveau 95% de la résistance à la compression d'un béton dont l'indice de rebondissement serait 60, lors d'un essai expérimental.

Résistance en fonction de l'indice de rebondissement

Régression	
Modèle de régression	Linéaire
Sortie DROITEREG brute	
1,68	-32,56
0,06	2,53
0,94	3,87
717,99	49,00
10779,93	735,69
Statistiques de régression	
R^2	0,94
Erreur type	3,87
Nombre de variables	1,00
Observations	51,00
R^2 ajusté	0,93

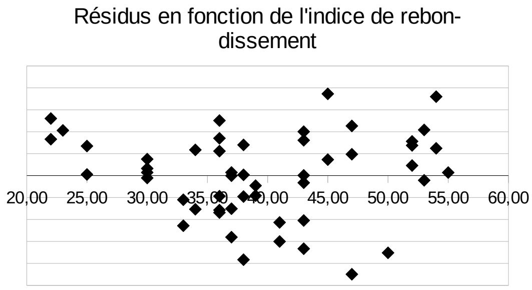
moyenne des x	39,43



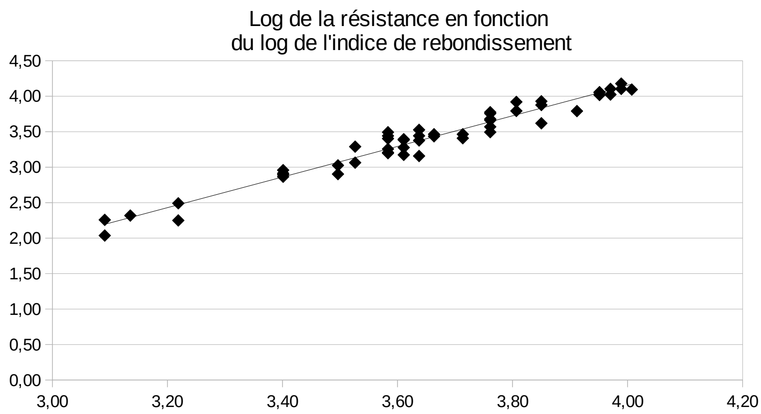
Analyse de la Variance (ANOVA)					
	df	SS	MS	F	Précision F
Régression	1,00	10779,93	10779,93	717,99	6,32E-31
Résidu	49,00	735,69	15,01		
Total	50,00	11515,62			

Niveau de confiance	0,95

	Coefficients	Erreur type	Statistique de Studen	Valeur P	Inférieur 95	Supérieur 9
Intercepter	-32,56	2,53	-12,88	2,38E-17	-37,64	-27,48
X1	1,68	0,06	26,80	6,32E-31	1,55	1,80

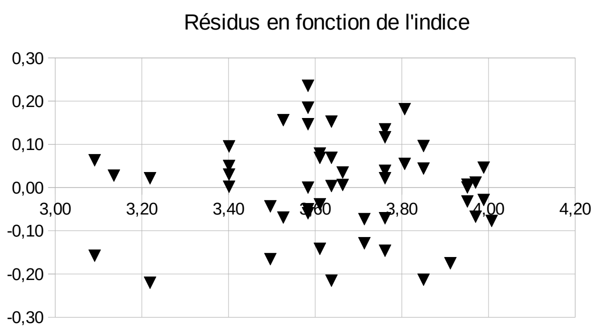


Log de la résistance en fonction du log de l'indice de rebondissement



Régression	
Modèle de régress	Linéaire
Sortie DROITEREG brute	
2,16	-4,48
0,07	0,24
0,96	0,11
1064,97	49,00
12,93	0,59
Statistiques de régression	
R^2	0,96
Erreur type	0,11
Nombre de variabl	1,00
Observations	51,00
R^2 ajusté	0,96

$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$	3,65
$\sigma_x^2=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k^2-\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2$	0,054



Analyse de la Variance (ANOVA)						
	df	SS	MS	F	Précision F	
Régression	1,00	12,93	12,93	1064,97	6,69E-35	
Résidu	49,00	0,59	0,012			
Total	50,00	13,52				
Niveau de confian	0,95					
	Coefficients	Erreur type	Statistique de	Valeur P	Inférieur 95%	Supérieur 95%
Intercepter	-4,48	0,24	-18,52	9,10E-24	-4,96	-3,99
X1	2,16	0,07	32,63	6,69E-35	2,03	2,29

Le tableau ci-contre donne la valeur de t où la fonction de répartition est égal à α. Par exemple si X suit une loi de Student à 12 degrés de libertés $P(X \leq 2,68) = 0,99$.

Lois \ α	0,05	0,9	0,95	0,975	0,99	1-10^{-8}
$\mathcal{N}(0;1)$	-1,64	1,28	1,64	1,96	2,33	5,61
$\mathcal{S}(10)$	-1,81	1,37	1,81	2,23	2,76	15,90
$\mathcal{S}(11)$	-1,80	1,36	1,80	2,20	2,72	14,22
$\mathcal{S}(12)$	-1,78	1,36	1,78	2,18	2,68	12,98
$\mathcal{S}(49)$	-1,68	1,30	1,68	2,01	2,40	6,69
$\chi^2(11)$	19,68	5,58	4,57	3,82	3,05	0,20
$\chi^2(12)$	21,03	6,30	5,23	4,40	3,57	0,28