Exam L3 GC - Janvier 2022

Exo 1 : $\Psi(P)=0$ $\quad \overrightarrow{\text{grad}}\,\Psi = \begin{pmatrix} 4x^3-3yz \\ 4y^3-3xz \\ 4z^3-3xy \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{\text{grad}}\,\Psi(P) = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ $\quad \boxed{\vec n = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}$

équation du plan tangent $1.(x-x_P)+1(y-y_P)+1.(z-z_P)=0$ soit $\boxed{x+y+z-3=0}$

1.3 : $\vec u = (1;-1;0)$ est un vecteur du plan tangent

$\vec v = \vec n \wedge \vec u$ est orthogonal à $\vec n$ il appartient donc au plan tangent et $\vec v \perp \vec u$

$\vec v = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$ $\quad (P;\vec u;\vec v)$ est un repère orthogonal de T.

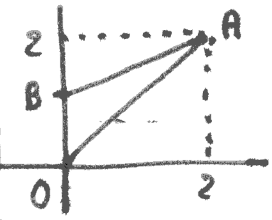
1.4 : Symétrie par rapport à (Oxy) : $(x;y;z) \longrightarrow (x;y;-z)$ or $\Psi(1;1;1) \neq \Psi(1;1;-1)$

Demi tour d'axe (Ox) : $(x,y,z) \longrightarrow (x;-y;-z)$ et $\Psi(x,y,z) = \Psi(x;-y;-z)$

Symétrie de centre O : $(x,y,z) \longrightarrow (-x;-y;-z)$ or $\Psi(1,1,1) \neq \Psi(-1,-1,-1)$

Donc des trois la seule symétrie de la figure est le demi tour d'axe (Ox)

Exo 2 : (OA) a pour équation $y=x$ et (OB) : $y = 1+\frac{1}{2}x$



Appliquons Fubini $I = \int_0^2 \int_x^{1+\frac12 x} x^2\,dy\,dx$

$I = \int_0^2 x^2\left(1+\frac12 x - x\right)dx = \int_0^2 x^2 - \frac12 x^3\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{8}\right]_0^2 = \boxed{\frac{2}{3} = I}$

2.2. On peut appliquer la formule de Green Riemann $\iint_K \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = \int_{\partial K} P\,dx + Q\,dy$

$J = \int_{\partial T^+} x^3\,dy = \iint_T 3x^2\,dx\,dy = 3I = \boxed{2 = J}$

On peut aussi paramétrer les 3 segments. $4-2+0=2$.

Exo 3 : $y'+2y = xe^x$ E. D. linéaire d'ordre 1 à coef constant.

$y'+2y=0$ a pour solution $y = Ke^{-2x}$ avec K une constante.

on cherche ensuite une solution de (E_1) de la forme $(ax+b)e^x$

$z(x) = (ax+b)e^x$ $\quad z'(x) = (ax+a+b)e^x$ $\quad z'(x)+2z(x) = (3ax+3b+a)e^x$

z est sol de (E_1) ssi $a=\frac13$ et $3b+a=0$ donc $z(x) = \left(\frac13 x - \frac19\right)e^x$

Sol. de (E_1) : $\boxed{y(x) = \left(\frac13 x - \frac19\right)e^x + Ke^{-2x}}$

Exo 3.2 : (E_2) est une E.D. linéaire d'ordre 2 à coef. constants.

$P(x) = x^2+2x+5$ $\quad \Delta = 4-20 = -16 = (4i)^2$ $\quad r = \frac{-2\pm 4i}{2} = -1\pm 2i$

Sol. de l'ESSM $\quad y(x) = e^{-x}(K_1\cos 2x + K_2 \sin 2x)$

on cherche une sol. de la forme $y(x) = ax+b$ et on trouve $x-\frac25$

Sol. de (E_2) : $\boxed{y(x) = x - \frac25 + e^{-x}(K_1 \cos 2x + K_2 \sin 2x)}$

Exo 3.3 : $2y' + y(y+1) = 0 \iff \frac{2y'}{y(y+1)} = -1$ or $\frac{1}{y(y+1)} = \frac{-1}{y+1} + \frac{1}{y}$

$\frac{-y'}{y+1} + \frac{y'}{y} = -\frac{1}{2}$ on intègre en x $\quad -\ln|y+1| + \ln|y| = -\frac{1}{2}x + C$

d'où $\frac{y}{y+1} = Ke^{-\frac{1}{2}x}$ $\quad y = (y+1)Ke^{-\frac{1}{2}x}$ $\quad y(x) = \frac{Ke^{-\frac{1}{2}x}}{1-Ke^{-\frac{1}{2}x}} = \frac{K}{e^{\frac{1}{2}x} - K}$

$y(0)=2$ permet de déterminer k $\quad \frac{2}{2+1} = K$ d'où $\boxed{y(x) = \frac{2}{3e^{\frac{1}{2}x} - 2}}$

Exo 4 : on peut remarquer que $\frac{1}{2}x^2$ est sol. d'où $y(x) = \frac{1}{2}x + K(3x-2y)$

Sinon on pose $\begin{cases} u = x + ay \\ v = y \end{cases}$ $\varphi(x,y) = \xi(u,v) = \xi(x+ay; y)$ d'où $\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial u} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} = a\frac{\partial \xi}{\partial u} + \frac{\partial \xi}{\partial v} \end{cases}$.

$2\frac{\partial \varphi}{\partial x} - 3\frac{\partial \varphi}{\partial y} = (2-3a)\frac{\partial \xi}{\partial u} - 3\frac{\partial \xi}{\partial v}$ $\quad$ Posons $a = \frac{2}{3}$ $\begin{cases} x = u - \frac{2}{3}v \\ y = v \end{cases}$

$(F_1) \iff -3\frac{\partial \xi}{\partial v} = u - \frac{2}{3}v \iff -3\xi = uv - \frac{1}{3}v^2 + k(u)$ avec $K : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\iff \varphi(x;y) = -\frac{1}{3}(x+\frac{2}{3}y)y + \frac{1}{9}y^2 + K(x+\frac{2}{3}y) = \boxed{-\frac{1}{3}xy - \frac{1}{9}y^2 + K(x+\frac{2}{3}y) = \varphi(x,y)}$

4.2 : Même changement de variable avec $a = -3$

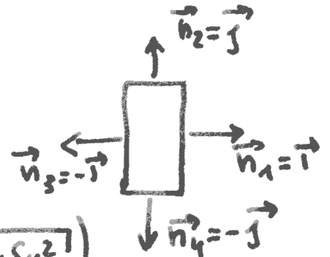
$(F_2) \iff \frac{\partial \xi}{\partial v} = (u - 2v)\xi$ $\quad \begin{cases} u = x - 3y \\ v = y \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x = u + 3v \\ y = v \end{cases}$

$\iff \ln|\xi| = uv - v^2 + K(u)$ $\quad$ avec $K : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction quelconque.

$\iff \xi(u,v) = C(u)e^{uv-v^2} \iff \boxed{\varphi(x,y) = C(x-3y)e^{xy-4y^2}}$

$\varphi(t,t) = 4t^2 \iff C(-2t)e^{-3t^2} = 4t^2 \iff C(T) = e^{+3(-\frac{T}{2})^2}4(\frac{T}{-2})^2 = T^2e^{\frac{3}{4}T^2}$

$$\boxed{\varphi(x,y) = (x-3y)^2 e^{\frac{3}{4}(x-3y)^2} e^{xy-4y^2}}$$



Exo 5 : 1) flux $= \Psi_1 \times 2 + \Psi_2 - \Psi_1 \times 2 - \Psi_2 = 0$.

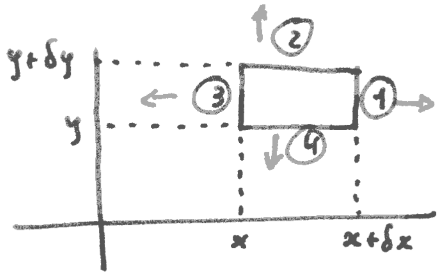
5.2 : $\Phi_i(x+\delta x; y+\delta y) = \Phi_i(x,y) + \frac{\partial \Phi_i}{\partial x}(x,y)\delta x + \frac{\partial \Phi_i}{\partial y}(x,y)\delta y + o(\sqrt{\delta x^2 + \delta y^2})$

5.3 : côté 1 : $\Phi_1(x+\delta x, \tilde{y})\delta y$

côté 2 : $\Phi_2(\tilde{x}; y+\delta y)\delta x$

côté 3 : $-\Phi_1(x; \tilde{y})\delta y$

côté 4 : $-\Phi_2(\tilde{x}; y)\delta x$



$= (\Phi_1(x+\delta x; \tilde{y}) - \Phi_1(x; \tilde{y}))\delta y + (\Phi_2(\tilde{x}; y+\delta y) - \Phi_2(\tilde{x}; y))\delta x$

$\simeq \frac{\partial \Phi_1}{\partial x}(x; \tilde{y})\delta x \delta y + \frac{\partial \Phi_2}{\partial y}(\tilde{x}; y)\delta y \delta x$.

5.4. $\frac{\text{Flux sortant de } R_\delta}{\text{Aire}(R_\delta)} = \frac{\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x}(x; \tilde{y}) + \frac{\partial \Phi_2}{\partial y}(\tilde{x}; y)\right)\delta x \delta y}{\delta x \delta y} \longrightarrow \frac{\partial \Phi_1}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial \Phi_2}{\partial y}(x,y)$

$= \mathrm{div}(\Phi)$