

Contrôle de Mathématiques, 8 janvier 2021

Les documents sont interdits à l'exception d'une feuille A4, manuscrite, au choix de l'étudiant. L'utilisation ou la consultation de téléphone est formellement interdite, les calculatrices et les téléphones doivent être rangés et éteints.

Exercice 1 :

Soit $\varphi(x, y, z) = x^2 + e^{xz}y^2 - z - 5$, S la surface de \mathbb{R}^3 d'équation $\varphi(x, y, z) = 0$ et $P = (2; 1; 0)$.

1. Montrer que $P \in S$.
2. Calculer les dérivées partielles de φ .
3. Déterminer un vecteur orthogonal à S en P .
4. Déterminer une équation du plan tangent à S en P .

Exercice 2 :

Soit Φ le champ vectoriel position $\Phi(x, y, z) = (x, y, z)$ et $\Psi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un champ vectoriel.

1. Écrire $\Psi \wedge \Phi$ en fonction des coordonnées de $\Psi = (\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3)$.
2. Montrer que la divergence de $\Psi \wedge \Phi$ est égal au produit scalaire de Φ avec le rotationnel de Ψ .

Exercice 3 :

Soit D un domaine du plan on appelle moment quadratique de D par rapport à un point $A = (x_A, y_A)$ la grandeur

$$I_A = \iint_D (x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 dx dy$$

Soient les deux domaines suivants K le quart de disque $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$, T le triangle OAB avec O l'origine du repère, $A = (1, 0)$ et $B = (0, 1)$.

1. Représenter T et K .
2. Calculer le moment quadratique de K par rapport à A .
3. Calculer le moment quadratique de T par rapport à A .

Exercice 4 : EDO et EDP

Résoudre les EDO et EDP suivantes :

(E₁)

$$y' - 2xy = x$$

(E₂)

$$y'' - 4y' + 13y = 13x$$

(E₃)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + 3 \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 2\varphi$$