

Contrôle du Vendredi 5 avril 2019

Téléphone, calculatrice et document interdit à l'exception d'une feuille A4 recto manuscrite au choix de l'étudiant. Barème indicatif : 7+6+8

Exercice 1 : Petites questions proche du cours

1. En coordonnées sphériques, décrire la surface S d'équation $\varphi = \frac{\pi}{6}$.
2. Vérifier la formule $\nabla \cdot (\varphi \Phi) = \nabla \varphi \cdot \Phi + \varphi \nabla \cdot \Phi$ sur l'exemple suivant $\varphi(x, y) = x + y$ et $\Phi(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 \\ 5xy \end{pmatrix}$.
3. Démontrer que le rotationnel d'un gradient est toujours nul.
4. Soit a, b des fonctions scalaires, et (E) l'équation différentielle

$$y''(x) + a(x)y(x) = b(x)$$

Soit y_0 une solution de (E) , à quelle condition sur z , $y_0 + z$ est solution de (E) .

5. Soit T le triangle de sommets $A : (-1; 0)$, $B : (1, 0)$ et $C : (0; 1)$. Représenter T , puis calculer l'intégrale

$$I = \iint_T x \, dx \, dy$$

Exercice 2 : Soit Γ la courbe paramétrée pour $t \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ par :

$$F(t) = (\cos t; \sin 2t)$$

1. Comparer abscisses et ordonnées des points de coordonnées $F(-t)$ et $F(t)$, interprétation géométrique.
2. Étudier les fonctions $\sin 2t$ et $\cos t$ sur $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$
3. Déterminer des vecteurs tangents à Γ en $(0; 0)$ et en $(1; 0)$.
4. Représenter rapidement Γ .
5. Soit D un domaine, dont le bord orienté positivement est \mathcal{C}^+ , montrer que l'aire de D est égale à

$$\text{aire}(D) = - \oint_{\mathcal{C}^+} y \, dx$$

6. En déduire l'aire de la surface délimité par Γ .

Exercice 3 : Résoudre les équations différentielles et l'EDP suivantes

$$(E_1) \quad y' - 5y = 2xe^{5x}$$

$$(E_2) \quad y'''' - 2y'''' + 5y'' - 8y' + 4y = 6e^{-x}$$

$$(E_3) \quad 5 \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) - 2 \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) = 1$$