

## Examen de statistiques

Les calculatrices, les tables numériques, ainsi qu'une feuille A5 recto-verso manuscrite au choix de l'étudiant, sont autorisées. Tout autre document, les téléphones ainsi que les ordinateurs sont interdits.  
 Barème indicatif : 8+7+5+7

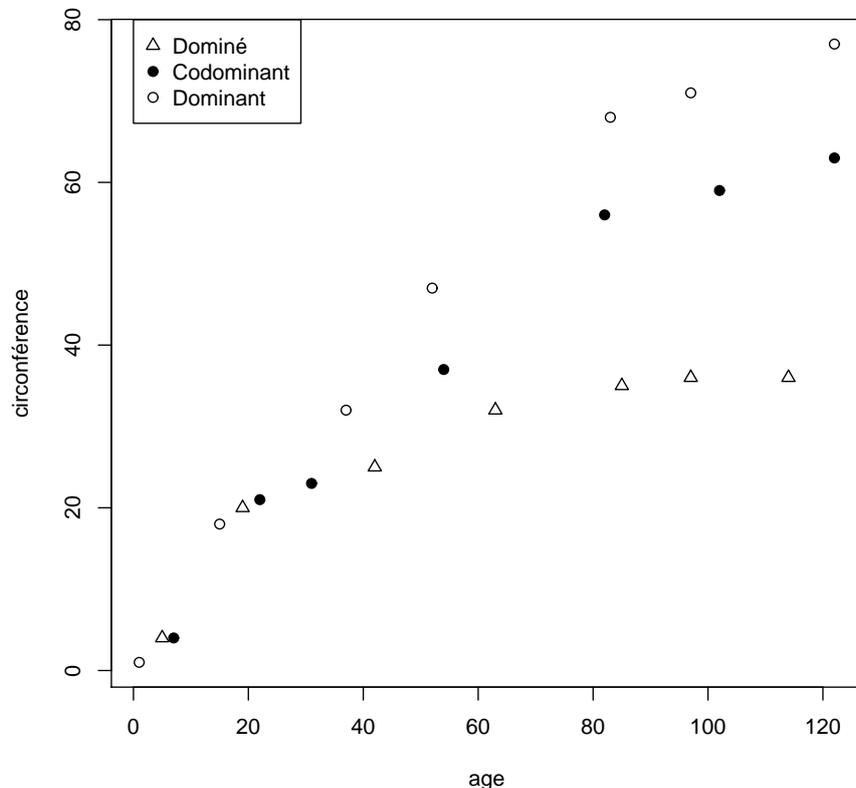
**Exercice 1 :** Évolution des arbres en milieu forestier.

On a mesuré sur un peuplement de bouleaux blancs (*Betula alba*) dans le Massif Central les circonférences des troncs de 21 individus à la hauteur de 1,3 mètres du sol (indice DBH). Dans le même temps, un carottage des arbres a permis d'estimer leurs âges respectifs. Par ailleurs, on a constaté sur le terrain que les arbres se répartissent en trois catégories : les arbres les plus hauts (dominants), les arbres moyens (codominants) et les arbres plus petits, sous le couvert des autres : les dominés.

Dominants	Age	1	15	37	52	83	97	105
	Circonférence	1	18	32	47	68	71	77
Codominants	Age	7	22	31	54	82	102	122
	Circonférence	4	21	23	37	56	59	63
Dominés	Age	5	19	42	63	85	97	114
	Circonférence	4	20	25	32	35	36	36

Par exemple, il y a un arbre dominant âgé de 52 ans dont l'indice DBH est de 47 cm.

1. Calculer dans le cas des arbres dominés le coefficient de corrélation linéaire. Un modèle linéaire est-il envisageable ?
2. Déterminer l'équation de la droite de régression linéaire donnant l'indice DBH des arbres dominés en fonction de l'âge de ces arbres.
3. Calculer dans le cas des arbres dominants le coefficient de corrélation linéaire. Un modèle linéaire est-il envisageable ?
4. En étudiant ci dessous, les représentations graphiques des données précédentes, pensez-vous que le modèle linéaire soit un bon modèle, dans le cas dominés, codominants, dominants.



**Exercice 2 :** On modélise la taille en mm du grand Corégone par une variable aléatoire de loi normale de moyenne 420 et de variance 2500, ( $X \sim \mathcal{N}(420; 2500)$ ).

1. Dans ce modèle quelle est la proportion de grand Corégone qui mesure plus de 450 mm ?
2. Dans ce modèle quelles sont les tailles des 25% de poissons les plus grands.
3. A quoi ressemblerait la boîte à moustache de la taille des grands Corégone pour un tirage de 400 grand Corégone.
4. On pêche 25 grands Corégones, quelle est la probabilité que la taille moyenne de cet échantillon soit supérieure à 430 mm ? On supposera l'indépendance des tailles des poissons pêchés.

**Exercice 3 :** On cherche à titrer une solution comprenant  $\lambda$  bactéries par  $\text{cm}^3$ , pour cela on modélise le nombre de bactéries se trouvant dans  $1 \text{ cm}^3$  de solution par une variable aléatoire de loi de Poisson. On rappelle qu'une variable aléatoire de Poisson de paramètre  $a$ , possède une espérance égale à  $a$  et une variance égale à  $a$ . On ensemence 400 boîtes de Petri, chacune avec un  $\text{cm}^3$  de solution, après six jours de culture, chaque bactérie a donné naissance à une colonie, visible à l'œil nu. On obtient les résultats suivants :

Nombre de colonies	1	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
effectif de boîtes	2	3	8	10	30	45	44	42	63	50	41	20	17	8	7	6	3	1

1. Calculer le nombre moyen de colonies par boîtes de Petri, puis la variance du nombre de colonies.
2. Comment peut-on estimer simplement  $\lambda$ .
3. Déterminer un intervalle de confiance au niveau 90% pour  $\lambda$ .

**Exercice 4 :** On cherche à évaluer l'efficacité d'un traitement local de la pharyngite d'origine virale. Pour cela on demande à des patients allant consulter leur médecin pour cette affection, de noter la gêne occasionnée par la maladie sur une échelle de 1 à 10. Puis de nouveau 3 jours plus tard. On évalue ainsi la diminution de cette gêne, pour un échantillon témoin d'effectif  $n_1$  à qui il est prescrit un placebo (médicament sans principe actif) et un échantillon test d'effectif  $n_2$  à qui il est prescrit le traitement à tester. L'étude se fait en double aveugle, c'est à dire que ni le patient ni le médecin ne savent si le patient prend le traitement actif ou le placebo. On note  $m_1$  la baisse moyenne de la gêne pour le groupe témoin,  $n_1$  l'effectif de ce groupe et  $\hat{s}_1^2$  la variance estimée de la population à l'aide du groupe témoin, idem pour le groupe test.

- Groupe témoins :  $n_1 = 65$ ,  $m_1 = 3,7$ , et  $\hat{s}_1^2 = 5,3$ .
- Groupe test :  $n_2 = 92$ ,  $m_2 = 4,2$ , et  $\hat{s}_2^2 = 9,1$ .

On fait l'hypothèse que la diminution de la gêne suit une loi normale et que l'écart type des deux populations sont les même. Peut-on déduire de l'étude, à l'aide d'un test au niveau 99% (risque de première espèce 1%) que le traitement diminue de façon significative la gêne due à la pharyngite. Expliquer bien calculs et résultats.