# Examen de Mathématiques (Probabilités et Statistiques) du 15 juin 2007

Durée: **1h30**; Les documents ne sont pas autorisés; les calculatrices type collège sont autorisées

---

**Exercice 1 :** La formation d'œdemes dépend de deux paramètres : la pression colloïde $C$ et la pression hydrostatique $H$ du sang. On a mesuré ces deux parametres et on a obtenu les paires de données suivantes :

| | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $C$ | 2,3 | 3 | 3,6 | 4,3 | 5 | 5,7 | 6,7 | 6,9 | 8,1 | 8,9 | 9,7 | 11 | 11,9 | 13,4 | 14,3 | 15,7 |
| $H$ | 1,6 | 1,2 | 1,8 | 2,5 | 2,8 | 3,8 | 2,9 | 4,4 | 4,8 | 5,4 | 5,6 | 7,2 | 5,6 | 7,6 | 7,2 | 7,6 |

Pour pouvoir faire une analyse de ces données plus rapidement, on groupe les résultats des caractères $C$ et $H$ dans des classes de longueur = 2. On construit ensuite le tableau à double entrée suivant (dont la signification des 3 dernières colonnes/lignes sera expliquée ci-dessous) :

| $H$ \ $C$ | [2,4[ | [4,6[ | [6,8[ | [8,10[ | [10,12[ | [12, 14[ | [14, 16] | $n_{i\cdot}$ | $h_i$ | $n_{i\cdot}h_i$ | $n_{i\cdot}h_i^2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $[1,3[$ | | | | | | | | | | | |
| $[3,5[$ | | | | | | | | | | | |
| $[5,7[$ | | | | | | | | | | | |
| $[7,9]$ | | | | | | | | | | | |
| $n_{\cdot j}$ | | | | | | | | | | | |
| $c_j$ | | | | | | | | | | | |
| $n_{\cdot j}c_j$ | | | | | | | | | | | |
| $n_{\cdot j}c_j^2$ | | | | | | | | | | | |

1. Remplir les cases se trouvant à l'intérieur de l'encadré gras, c'est-à-dire trouver les effectifs $n_{ij}$ correspondants à la ligne $i$ et à la colonne $j$ du tableau. On convient de laisser la case vide lorsque $n_{ij} = 0$.
2. Calculer les sommes marginales des effectifs $n_{i\cdot}$ et $n_{\cdot j}$ et les reporter dans les colonnes correspondantes.
3. Si une classe $[a_k, a_{k+1}[$ correspond à un caractère $X$ (dans notre cas $X$ peut être $H$ ou $C$) on convient de noter par $x_k$ la valeur $\frac{1}{2}(a_k + a_{k+1})$. Avec cette convention appliquée à $H$ et $C$, remplir les cases des 3 dernières lignes/colonnes du tableau.
4. Quel est l'effectif total $N$ des mesures effectuées ? Dans quelle case du tableau retrouve-t-on ce nombre ?
5. Ecrire la définition de la moyenne pour les caractères $H$ et $C$ et déduire des questions précédentes les valeurs exactes de ces moyennes.
6. Ecrire la définition de la variance pour les caractères $H$ et $C$ et déduire des questions précédentes les valeurs exactes de ces variances.
7. En déduire les écarts-types $\sigma(H)$ et $\sigma(C)$.
8. Calculer la covariance $\mathrm{cov}(H, C)$.
9. En déduire le coefficient de corrélation des séries de caractères $H$ et $C$.
10. Représenter graphiquement le nuage statistique correspondant à la paire de caractères $H$ et $C$.

**Exercice 2 :** On sait qu'à une caisse de supermarché on peut constater à la fin du jour de travail une erreur qui ne peut dépasser 3 euros (en plus ou en moins). On se propose de calculer la probabilité pour que l'erreur commise à une telle caisse au bout de 225 jours soit inférieure à 43 euros.

1. On associe à chaque jour (parmi les 225 jours) une variable aléatoire $X_j$ = "erreur de caisse du jour $j$-ème". On considère que ces variables aléatoires sont indépendantes et suivent une loi uniforme sur l'intervalle $[-a, a]$ où $a = 3$ euros.
   On rappelle qu'une loi uniforme sur un intervalle $[\alpha, \beta]$ est une loi absolument continue de densité $f$ définie par $f(x) = 1/(\beta - \alpha)$ si $x \in [\alpha, \beta]$ et $f(x) = 0$ si $x \in \mathbb{R} \setminus [\alpha, \beta]$.

**— tourner la page —**

(a) Donner les définitions de l'espérance $E(X)$ et de la variance $V(X)$ d'une variable aléatoire absolument continue de densité $f$.

(b) Montrer que lorsque $X$ suit une loi uniforme sur $[\alpha, \beta]$ on a :

$$E(X) = \frac{\alpha+\beta}{2} \quad , \quad E(X^2) = \frac{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2}{3} \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{(\beta-\alpha)^2}{12}.$$

(c) En déduire les valeurs de $E(X_j)$ et de l'écart-type $\sigma(X_j)$ (quand $[\alpha, \beta] \equiv [-a, a]$, $a = 3$ euros).

2. Notons par $S$ la variable aléatoire "erreur de caisse sur les 225 jours".
   (a) Ecrire la formule qui relie $S$ aux $X_j$.
   (b) Que valent l'espérance $E(S)$ et l'écart-type $\sigma(S)$ ?
   (c) Appliquer le théorème de la limite centrale pour calculer la probabilité $P(\{-43 \leq S \leq 43\})$ demandée dans l'énoncé.
3. Quelle doit être, par jour, l'erreur de caisse tolérée, de sorte qu'on ait une erreur d'au plus 50 euros sur 225 jours avec un risque de 1% ?

---

**Annexe :**