

CORRIGÉ de l'Examen de Mathématiques (Probabilités et Statistiques)



Exercice 1 : *Questions 1. à 4.* : Le tableau se remplit de la façon suivante :

$H \backslash C$	[2,4[[4,6[[6,8[[8,10[[10,12[[12, 14[[14, 16]	n_i	h_i	$n_i \cdot h_i$	$n_i \cdot h_i^2$
[1, 3[3 (18)	2 (20)	1 (14)					6	2	12	24
[3, 5[1 (20)	1 (28)	1 (36)				3	4	12	48
[5, 7[2 (108)	1 (66)			3	6	18	108
[7, 9]					1 (88)	1 (104)	2 (240)	4	8	32	256
n_j	3	3	2	3	2	1	2	$N = 16$			
c_j	3	5	7	9	11	13	15				
$n_j c_j$	9	15	14	27	22	13	30				
$n_j c_j^2$	27	75	98	243	242	169	450				

où, dans les cases des effectifs n_{ij} nous avons mis entre parenthèses les valeurs des quantités $n_{ij} h_i c_j$ correspondantes (qui nous seront ultérieurement utiles pour le calcul de la covariance).

Questions 5 à 9 : $\bar{C} = 8,125$; $\bar{H} = 4,625$; $V(C) = 15,485$; $V(H) = 5,86$; $\sigma(C) = 3,935$; $\sigma(H) = 2,42$; $\text{cov}(H, C) = 8,79$; $r = 0,923$. En effet, on a :

$$\bar{C} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^7 n_j c_j = \frac{9 + 15 + 14 + 27 + 22 + 13 + 30}{16} = 8,125 \quad \text{et}$$

$$\bar{H} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^4 n_i h_i = \frac{12 + 12 + 18 + 32}{16} = 4,625$$

$$\begin{aligned} V(C) &= \frac{1}{N} \sum_{j=1}^7 n_j (c_j - \bar{C})^2 = \overline{C^2} - \bar{C}^2 = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^7 n_j c_j^2 - \bar{C}^2 \\ &= \frac{27 + 75 + 98 + 243 + 242 + 169 + 450}{16} - (8,125)^2 = 15,485 \end{aligned}$$

$$V(H) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^4 n_i (h_i - \bar{H})^2 = \overline{H^2} - \bar{H}^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^4 n_i h_i^2 - \bar{H}^2 = \frac{24 + 48 + 108 + 256}{16} - (4,625)^2 = 5,86$$

$$\sigma(C) = \sqrt{V(C)} = 3,935 \quad \text{et} \quad \sigma(H) = \sqrt{V(H)} = 2,42.$$

$$\begin{aligned} \text{cov}(H, C) &= \overline{H \cdot C} - \bar{H} \cdot \bar{C} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^7 n_{ij} h_i c_j - \bar{H} \cdot \bar{C} \\ &= \frac{18 + 20 + 14 + 20 + 28 + 36 + 108 + 66 + 88 + 104 + 240}{16} - 8,125 \times 4,625 = 8,79. \end{aligned}$$

$$r = \frac{\text{cov}(H, C)}{\sigma(H)\sigma(C)} = \frac{8,79}{2,42 \times 3,935} = 0,923.$$

Donc le coefficient de corrélation est assez bon, ce qui est visible aussi sur le nuage statistique :