

CY Cergy Paris université
Novembre 2020

Contrôle continu 2 - Mathématiques 1

Durée: 1 heure, les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés

Exercice 1.

Etudier la continuité de la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(0) = 0, \text{ et } f(x) = x \cos\left(\frac{1}{x}\right), \quad \forall x \neq 0.$$

Exercice 2.

Montrer que l'équation $x^5 = 3x^2 + 4$ admet au moins une solution dans $[0, 2]$.

Exercice 3.

Calculer la dérivée des fonctions suivantes:

(1) $f(x) = e^x \cdot \sin(x^3)$

(2) $g(x) = \frac{\ln(\cos(x))}{x^2+1}$

(3) $h(x) = \ln(\ln(\ln(x)))$

Exercice 4.

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = 6xe^{x^2} - 4x^3.$$

- (i) Justifier rapidement que f est continue et dérivable.
- (ii) Calculer $f'(x)$ et vérifier que $f'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
- (iii) Montrer que f est une bijection de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

Exercice 5. A l'aide du théorème des accroissements finis, démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{2\sqrt{n+1}} \leq \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

En déduire la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$.