Université de Cergy-Pontoise
Date: Juin 2018

Examen MS4
Durée: 2h, les documents ne sont pas autorisés

Exercice 1.
On range sur une étagère 5 livres, dont 2 livres de mathématiques, 2 livres de physique, et 1 romain.
(a) Combien y a-t-il de rangements possibles?
(b) Combien y-a-t-il de rangements possibles, si l'on impose que les 2 livres de mathématiques soient ensembles ?

Exercice 2.
Dans un étang, une population de poissons est menacée par une maladie contagieuse, et on estime que 10% des poissons sont malades. On applique aux poissons de tout l'étang un traîtement, qui traîte la maladie, mais qui fragilise également les poissons.
Soit M l'évènement qu'un poisson soit malade avant le traîtement, et soit M' l'évènement qu'un poisson soit malade après le traîtement.
On sait que parmi les poissons malades, 80% ne sont plus malades après le traîtement. Par contre, on ne connaît pas le pourcentage, parmi les poissons non-malades, des poissons qui seront malades après le traîtement, que l'on note par x.
(a) Dresser un arbre pondéré.
(b) Pour connaître la valeur de x, on examine un échantillon de poissons après le traîtement, de 500 individus. On en constate 13 poissons malades. Calculer la proportion, notée f', des poissons malades de l'échantillon.
(c) Soit p' la proportion, après le traîtement, des poissons malades de tout l'étang. Déterminer l'intervalle de confiance de p', au risque de 5%. On considère que p' est la borne supérieure de l'intervalle de confiance obtenu.
(Rappel: L'intervalle de confiance au risque de 5% est donné par

$$[f - t\sqrt{\frac{f(1-f)}{n-1}}; f + t\sqrt{\frac{f(1-f)}{n-1}}],$$

où t est la constante associée au 5% de risque, et n le nombre total d'individus de l'échantillon.)
(d) Calculer la valeur de x. Puis calculer $P_{M'}(M)$.
(e) Afin de diminuer davantage le taux des poissons malades, on applique, à la suite du premier traîtement, un deuxième traîtement identique. Dresser

un arbre pondéré. Soit M'' l'évènement qu'un poissons soit malade après les deux traîtements. Calculer $P(M'')$.

Exercice 3.
Soit X la durée de vie d'une machine. On sait que X suit une loi exponentielle de paramètre λ, et que 30% des machines durent moins de 5 ans.
(a) Calculer la valeur de λ, et en déduire les valeurs de $E(X)$ et de $V(X)$.
(b) Calculer la probabilité pour qu'une machine dure plus de 7 ans.
(c) On considère une série de 5 machines, sélectionnées de manière indépendante. Calculer la probabilité qu'au moins deux machines durent plus de 7 ans.

Exercice 4.
Une machine fabrique des pièces cylindriques caractérisées par deux paramètres: le diamètre D de la pièce et la longueur L de la pièce.
On suppose que:
le diamètre D, en mm, est une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ où $m = 9$ et $\sigma = 0,5$,
et la longueur L en mm est également une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ où $m = 10$ et $\sigma = 0,25$.
En plus on suppose que D est L sont deux variables aléatoire indépendantes.

Une pièce fabriquée est conforme si

$$8,5 \leq D \leq 9,5 \quad \text{et} \quad 9,5 \leq L \leq 10,5$$

(a) Calculer les probabilités suivantes:
$p(8,5 \leq D \leq 9,5)$;
$p(9,5 \leq L \leq 10,5)$.
(b) En déduire la probabilité qu'une pièce fabriquée soit conforme.
(**Remarque**: deux évènements A et B sont indépendants ssi $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$.)
(c) Une pièce non-conforme est rectifiable si

$$D > 9,5 \quad \text{et} \quad L > 10,5.$$

Calculer $p((D > 9,5) \cap (L > 10,5))$.
(d) Une pièce coûte 5 euros à fabriquer. Si elle est conforme, alors elle sera vendue au prix de 15 euros. Si elle est non-conforme mais rectifiable, alors on la rectifie et le surcoût de l'opération étant de 2 euros. On appelle G la variable aléatoire associée au gain de l'entreprise pour une pièce.
(1) Donner la loi de probabilité de G.
(2) Déterminer l'espérance de gain pour la production d'une pièce.