Université de Cergy-Pontoise
Date: Mai 2018

Examen MS4
Durée: 3h, les documents ne sont pas autorisés

Exercice 1.
Soit X une variable aléatoire discrète dont les valeurs prises sont $\{1, \cdots, n\}$. Soient $E(X)$ l'espérance de X et $V(X)$ la variance de X.
(a) Quelle est la définition de $E(X)$? Soit a une constante réelle, démontrer que

$$E(aX) = a \cdot E(X).$$

(b) Quelle est la définition de $V(X)$? Démontrer que

$$V(aX) = a^2 \cdot V(X).$$

Exercice 2.
6 nouveaux professeurs vont être envoyés dans 3 écoles.
(a) Combien y a-t-il d'affectations possibles?
(b) Qu'en est-il si chaque école recevra exactement 2 professeurs?

Exercice 3.
Dans un étang, une population de poissons est menacée par une maladie contagieuse, et on se fixe l'objectif d'étudier la gravité de la situation.
(a) On examine un échantillon de poissons pris au hazard, de 500 individus, et on en constate 45 poissons malades. Calculer la proportion, notée f, des poissons malades.
(b) Soit p la proportion des poissons malades de tout l'étang. Suivant l'information de notre échantillon ci-dessus, calculer l'intervalle de confiance de p, au risque de 5%.
(Rappel: L'intervalle de confiance au risque de 5% est donné par

$$[f - t\sqrt{\frac{f(1-f)}{n-1}}; f + t\sqrt{\frac{f(1-f)}{n-1}}],$$

où t est la constante associée au 5% de risque, et n le nombre total d'individus de l'échantillon.)
(c) Afin de ne pas sous-estimer la situation, on considère que p est la borne supérieure de l'intervalle de confiance obtenu dans la question (b). On applique aux poissons de tout l'étang un traîtement, qui traîte la maladie, mais qui fragilise également les poissons.

Soit M l'évènement qu'un poisson soit malade avant le traîtement, et soit M' l'évènement qu'un poisson soit malade après le traîtement. On sait que parmi les poissons malades, 85% ne sont plus malades après le traîtement. Par contre, on ne connaît pas le pourcentage, parmi les poissons non-malades, des poissons qui seront malades après le traîtement, que l'on note par x. Dresser un arbre pondéré.
(d) Pour connaître la valeur de x, on examine un nouveau échantillon de poissons après le traîtement, encore de 500 individus. On en constate 15 poissons malades. Calculer la proportion, notée f', des poissons malades de l'échantillon.
Soit p' la proportion, après le traîtement, des poissons malades de tout l'étang. Déterminer l'intervalle de confiance de p', au risque de 5%. En cohérence par rapport à la question (c), on considère que p' est la borne supérieure de l'intervalle de confiance obtenu.
(e) En déduire la valeur de x. Puis calculer $P_{M'}(\bar{M})$.

Exercice 4.
Soit X une variable aléatoire continue de densité f définie par $f(x) = \frac{a}{1+x^2}$.
(a) Calculer la valeur de a.
(b) Calculer $P(-1 \leq X \leq 1)$.
(c) Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

Exercice 5.
Soit X la durée d'une plongée en jours d'un sous-marin. On sait que X suit une loi exponentielle de paramètre λ, et que 85% de ses plongées ont duré plus de 10 jours.
(a) Calculer la valeur de λ, et en déduire les valeurs de $E(X)$ et de $V(X)$.
(b) Calculer la probabilité pour qu'une plongée dépasse 12 jours.
(c) On considère une série de 4 plongées indépendantes. Calculer la probabilité qu'au moins une plongée dépasse 12 jours.
Pour $1 \leq i \leq 4$, soit X_i la durée de la i-ième plongée. Et soit Y la durée de la plus courte immersion du sous-marin, c-est-à-dire que

$$Y = min\{X_1, X_2, X_3, X_4\}.$$

Pour $\forall a \geq 0$, calculer $P(Y \geq a)$. En déduire la valeur de $P(Y \geq 12)$.

Exercice 6.
Une machine fabrique des pièces cylindriques dont le diamètre D en mm suit une loi normale. On sait que l'espérance de D est égale à 9 mm, mais on ne connaît pas l'écart-type de D, noté σ.

Sur un échantillon de 900 pièces, 854 pièces ont un diamètre inférieur à 9,3 mm.
(a) Donner une approximation de $P(D < 9,3)$.
(b) Soit $D^* = \frac{D-9}{\sigma}$, quelle est la loi de probabilité de D^*? En déduire la valeur de σ.
(c) Calculer la probabilité $P(8,9 < D < 9,2)$.
(d) Une pièce est conforme si $8,9 \leq D \leq 9,2$. Lorsque la pièce n'est pas conforme, elle est rejetée définitivement. On suppose qu'une pièce est vendue 25 euros, et coûte 10 euros à fabriquer. On appelle Y la variable aléatoire associée au gain d'une pièce fabriquée. Donner la loi de probabilité de Y, puis déterminer $E(Y)$ et $V(Y)$.