Université de Cergy-Pontoise
Date: Mai 2017

Examen MS4

Durée: 3h, les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés

Exercice 1.
(a) Enoncer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
(b) Enoncer le théorème de la limite centrale.

Exercice 2.
Une urne A contient 15 boules blanches et 5 boules rouges, alors que l'urne B contient 8 boules blanches et 2 boules rouges. Un joueur tire successivement, sans remise, 2 boules dans l'urne A. Si les deux boules tirées sont toutes blanches, alors le joueur tire une troixième boule dans l'urne B. Dans le cas contraire, le joueur ne tire pas de boule dans l'urne B.
(a) Dresser un arbre pondéré.
(b) Calculer la probabilité des évènements suivants:
C= { le joueur a tiré exactement une boule rouge }.
D= { le joueur a tiré au moins une boule blanche }.
(c) Sachant que le joueur a tiré exactement une boule rouge, quelle est la probabilité qu'il n'avait pas effectué de tirage dans l'urne B?
(d) Le joueur gagne le jeu s'il a tiré au moins une boule rouge. Calculer la probabilté que le joueur gagne.
(e) Le joueur joue 5 fois ce même jeu. Soit X la variable aléatoire qui représente le nombre de jeux gagnés. Quelle est la loi de probabilité de X? Calculer $E(X)$ et $V(X)$. Quelle est la probabilité que le joueur gagne au moins une fois?

Exercice 3.
Une machine fabrique des pièces cylindriques caractérisées par deux paramètres: le diamètre D de la pièce et la longueur L de la pièce.
On suppose que:
le diamètre D, en mm, est une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ où $m = 8$ et $\sigma = 0,5$,
et la longueur L en mm est également une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ où $m = 20$ et $\sigma = 0,25$.
En plus on suppose que D est L sont deux variables aléatoire indépendantes.

On considère qu'une pièce fabriquée est conforme si

$$7,5 \leq D \leq 8,5 \quad \text{et} \quad 19,5 \leq L \leq 20,5$$

(a) Calculer les probabilités suivantes:
$p(D < 8,5)$;
$p(7,5 \leq D \leq 8,5)$;
$p(19,5 \leq L \leq 20,5)$
(b) En déduire la probabilité qu'une pièce fabriquée soit conforme.
(**Remarque**: deux évènements A et B sont indépendants ssi $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$.)
(c) Une pièce non-conforme est rectifiable si

$$D > 8,5 \quad \text{et} \quad L > 20,5.$$

Calculer $p((D > 8,5) \cap (L > 20,5))$.
(d) Une pièce coûte 10 euros à fabriquer. Si elle est conforme, alors elle sera vendue 15 euros. Si elle est non-conforme mais rectifiable, alors on la rectifie et le surcoût de l'opération étant de 3 euros. On appelle G la variable aléatoire associée au gain de l'entreprise pour une pièce.
(1) Donner la loi de probabilité de G.
(2) Déterminer l'espérance de gain pour la production d'une pièce. En déduire l'espérance de gain pour 1000 pièces fabriquées.

Exercice 4.
Soit X une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.
(a) Vérifier que $\forall t > 0$, $P(X > t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}$.
(b) En déduire que $\forall t \geq 0$ et $\forall s \geq 0$,

$$P_{\{X>t\}}(X > s + t) = P(X > s).$$

Exercice 5.
Une entreprise souhaite faire une étude de satisfaction d'un nouveau produit. Pour cela, elle effectue un sondage auprès des consommateurs. Un consommateur intérrogé est prié de donner une note entière de 0 à 5 au produit. Soit N la variable aléatoire égale à la note donnée par un consommateur. On a intérrogé 100 consommateurs et on a obtenu la distribution statistique suivante:

Notes	0	1	2	3	4	5
Nombre de consommateurs	2	20	15	40	15	8

(a) Calculer la moyenne empirique et la variance empirique obtenus à partir de cette distribution.
(b) Déterminer l'expression de l'intervalle de confiance de N au risque 5% .

Table statistique