Université de Cergy-Pontoise
Date: Mai 2016

Examen MS4

Durée: 3h, les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés

Exercice 1.
(a) Enoncer la loi faible des grands nombres.
(b) Enoncer le théorème de la limite centrale.

Exercice 2.
Un étudiant doit choisir 3 des 8 questions d'un examen.
(a) De combien de manière peut-il les choisir ?
(Remarque: le choix de l'étudiant est sans ordre.)
(b) Calculer la probabilité qu'il a choisi exactement 2 des 4 premières questions.
(c) Calculer la probabilité qu'il a choisi au moins 1 des 5 premières questions.

Exercice 3.
Le quart d'une population a été vacciné contre une maladie contagieuse. Au cours d'une épidémie, on constate qu'il y a un malade sur douze parmi les vaccinés. Et on constate de plus qu'il y a parmi les malades 1 vacciné pour 4 non vaccinés. On considère V l'événement qu'une personne soit vaccinée, et M l'événement qu'une personne soit malade.
(a) Indiquer les valeurs de $P(V)$, $P_M(V)$ et $P_V(M)$.
(b) En déduire $P(V \cap M)$, $P(M)$ et $P(\bar{V} \cap M)$.
(c) Calculer $P_{\bar{V}}(M)$ et dresser un arbre pondéré.

Exercice 4.
Soit X une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.
(a) Vérifier que $\forall t > 0$, $P(X > t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}$.
(b) En déduire que $\forall t \geq 0$ et $\forall s \geq 0$,

$$P_{\{X>t\}}(X > s + t) = P(X > s).$$

Exercice 5.
On suppose que le nombre de pièces sortant d'une usine donnée en l'espace d'une semaine est une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ où $m = 50$ et $\sigma = 5$. Calculer $P(X < 55)$, $P(X > 60)$ et $P(40 < X < 65)$.
(Remarque: utiliser la table statistique)

Exercie 6.

On étudie le mouvement propre d'un compteur de Geiger-muller. Le nombre d'impulsions que l'on enregistre pendant un intervalle de temps donné, est une variable aléatoire dont l'espérance M caractérise le mouvement propre. On a effectué 100 comptages et on a obtenu la distribution statistique suivante:

Nombre d'impulsions	0	1	2	3	4
Nombre d'observations	22	38	23	9	8

(a) Calculer la moyenne empirique m et l'écart-type empirique obtenus à partir de cette distribution.

(b) Déterminer l'expression de l'intervalle de confiance de M au risque 5% .

Table statistique

Si U suit la loi normale centrée réduite, pour $x \geq 0$, la table donne la valeur $\phi(x) = P(U \leq x)$ avec $x = x_1 + x_2$ où x_1 et x_2 sont indiqués en marge. Pour $x < 0$, on utilise $\phi(x) = 1 - \phi(-x)$.

x_2 \ x_1	**0.00**	**0.01**	**0.02**	**0.03**	**0.04**	**0.05**	**0.06**	**0.07**	**0.08**	**0.09**
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]