Deuxième Année de Licence PC-C
Probabilités
2012/2013

Examen, 14 mai 2013, 3h

Téléphones portables interdits ou éteints. Calculatrice autorisée ainsi qu'un aide-mémoire manuscrit et personnel tenant sur une ou deux pages A4 recto-verso.

Exercice 1 : Soit X une variable aléatoire qui suit une loi normale d'espérance 2 et de variance $9 = 3^2$, et soit Y une variable aléatoire indépendante de même espérance et variance que X. On répondra aux questions suivantes sans justification.

1. Donner une valeur approchée de a telle que $P(|X-2| \geq 6) \approx a$.
2. Donner la valeur de b la plus petite possible telle que $P(|Y-2| \geq 6) \leq b$.
3. Donner l'espérance et la variance de $Z = \frac{X+Y}{2}$.
4. Trouver c tel que $P(X \leq c) \approx 0{,}95$
5. Donner une approximation de $P(0 \leq X \leq 5)$

Exercice 2 : On rappelle la formule suivante : $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\,dt = n!$.

Soit X une variable aléatoire continue dont la densité est nulle sur $\mathbb{R}_-$, et vaut pour tout $t \geq 0$, $f(t) = \frac{t^2}{2}e^{-t}$.

1. Calculer $P(X = 1)$ et $P(0 \leq X \leq 1)$.
2. Donner la valeur exacte de l'espérance et la variance de X.

Exercice 3 : Le nombre de rhumes attrapés par un individu en l'espace d'un an est une variable aléatoire de Poisson de paramètre $\lambda = 5$. Admettons qu'un remède miracle (basé sur l'effet de la vitamine C à haute dose) ait été lancé sur le marché et qu'il abaisse le paramètre λ à 3 pour 25% de la population. Pour les 75 derniers pourcent de la population, le remède n'a pas d'effet appréciable. Un individu essaie ce médicament pendant 1 an et attrape deux rhumes. Quelle est la probabilité que le remède ait eu un effet sur lui ?

Exercice 4 : Le Césium 137 est un atome radioactif dont la durée de vie est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

1. Sachant que le Césium 137 a une chance sur deux de disparaitre avant 30 ans, donner la valeur de λ.
2. Sachant qu'un atome de Césium 137 n'a pas disparu au bout de 30 ans, quelle est la probabilité qu'il disparaisse avant 60 ans ? Justifier.
3. On considère maintenant 10 000 atomes de Césium 137, dont on suppose que les durées de vie sont des variables aléatoires indépendantes de paramètre λ. On appelle N la variable aléatoire égale au nombre d'atomes encore présent (encore en vie) au bout de 30 ans.
   (a) Quelle loi suit N ? Quelle est son espérance, sa variance ?
   (b) Par quelle loi peut on approcher la loi de N ? Justifier.
   (c) Donner un intervalle de pari pour la valeur de N à 95% de confiance.

Exercice 5 : «*Woburn est une petite ville industrielle du Massachusetts, au Nord-Est des Etats-Unis. Du milieu à la fin des années 1970, la communauté locale s'émeut d'un grand nombre de leucémies infantiles survenant dans certains quartiers de la ville. Les familles se lancent alors dans l'exploration des causes et constatent la présence de décharges et de friches industrielles ainsi que l'existence de polluants. Dans un premier temps, les experts gouvernementaux concluent qu'il n'y a rien d'étrange. Mais les familles s'obstinent et saisissent leurs propres experts.*»

Dans cet exercice vous allez prendre la place de l'expert et décider si il y a quelque chose d'anormal ou non. Voici le tableau de données :

Enfants entre 0 et 14 ans	Population de Woburn selon le resencement de 1970 (n)	Nombre de cas de leucémie infantile observés à Woburn entre 1969 et 1979	Fréquence des leucémies à Woburn (f)	Fréquence des leucémies aux Etats-Unis (p)
Garçons	5969	9	0,00151	0,00052
Filles	5779	3	0,00052	0,00038
Total	11748	12	0,00102	0,00045

1. Donner l'intervalle de confiance à 95% pour la fréquence f observée, que ce soit pour les garçons ou pour les filles. On expliquera la méthode choisie pour l'intervalle de confiance.
2. Conclure, pour les garçons et pour les filles.

PS : Si cela vous intéresse, vous pouvez regarder le film «A civil action» («Préjudice» en français) avec John Travolta, le film est sorti en 1998 ou 1999.

Deuxième Année de Licence PC-C
Probabilités
2012/2013

Final exam, may 14, 2013, 3h

Cellulars forbidden. Calculator authorized and two manuscript sheets with course notes, A4 recto verso.

Exercise 1 : Let X be a random variable that follow a normal law with a mean value equal to 2 and a variance equal to $9 = 3^2$. Let Y be a random variable, independent from X, with the same mean value and variance. Answer to the following questions without any justification.

1. Give an approximate value of a such as $P(|X-2| \geq 6) \approx a$.
2. Give the smallest value of b such as $P(|Y-2| \geq 6) \leq b$.
3. Give the mean value and the variance of $Z = \frac{X+Y}{2}$.
4. Find c such as $P(X \leq c) \approx 0{,}95$
5. Give an approximate value of $P(0 \leq X \leq 5)$

Exercise 2 : We remind the following formula : $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\,dt = n!$.
Let X be a random variable with a density f equal to zero on the negative numbers, and for all $t \geq 0$, $f(t) = \frac{t^2}{2}e^{-t}$.

1. Compute $P(X=1)$ and $P(0 \leq X \leq 1)$.
2. Give the exact value of the mean value of X and its variance.

Exercise 3 : The numbers of flu that a person can have during one year is a random variable that follow a distribution of Poisson with $\lambda = 5$. We supposed that a miracle remed (using great quantity of Vitamin) can change the parameter λ to the value of 3 for only one person over 4. For the other 3 persons over 4, this remed has no effect at all. Someone try this remed and has 2 flus in one year. What is the probability that this remed has an effect on him ?

Exercise 4 : The 137 Cesium is a radioactive atom whose life time follow an exponential distribution with a parameter equal to $\lambda > 0$.

1. We know that the 137 Cesium has one chance over two to disappear before 30 years. Give the value of λ.
2. Knowing an atom of 137 Cesium is still alive after 30 years, what is the probability that it disappear before 60 years ? Explain.
3. We now consider 10 000 atoms of 137 Cesium, and we suppose that their life time are independent random variable with the same parameter λ. We called N the number of atoms still alive after 30 years.
   (a) What is the distribution of N ? What is its mean value and its variance ?
   (b) With which distribution can we approximate the distribution of N ? Why ?
   (c) Give a challenging interval for the value of N, with a confidence interval of 95%.

Exercise 5 : «*Woburn is a small town in the state of Massachusetts. In the 70s, the local population was worried about a great number of leukemia for children. The families look for the possible reasons of that and find some industrial dump with toxic products. For a moment, the government experts conclude that there is no link, but with the stubbornness of the families, independent experts study this case*»

In this exercise you will act as an expert and decide wether or not there is something abnormal. Here is the datas of the case :

Children between 0 and 14 years old	Population of Woburn in 1970 (n)	Number of leukemia between 1969 and 1979	Frequency of the leukemia in Woburn (f)	Frequency of leukemia in United States (p)
Boys	5969	9	0,00151	0,00052
Girls	5779	3	0,00052	0,00038
Total	11748	12	0,00102	0,00045

1. Give the confidence interval of 95% for the frequency f, for the boys and then for the girls. Explain your method.
2. Conclude, for the boys and for the girls.

PS : There is a movie about that case, called «A civil action» with John Travolta (1998).