Deuxième Année de Licence PC-C
Probabilités
2009/2010

UNIVERSITÉ de Cergy-Pontoise

Examen du 11 Mai 2010

Exercice 1 : La durée de vie des ampoules "Luminor" est une variable aléatoire continue T dont la densité de probabilité f est définie par :

$$f(t) = \begin{cases} 0,05e^{-0,05t} & \text{si} \quad t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

en prenant le mois pour unité de temps.

1. Quelle est la loi de T ? Donner l'espérance de vie d'une ampoule.
2. Déterminer la fonction de répartition de T.
3. Quelle est la probabilité pour que la durée de vie d'une ampoule soit supérieure à 2 ans ?
4. Quelle est la probabilité pour que la durée de vie d'une ampoule dépasse 3 ans sachant qu'elle est supérieure à 1 an ?

Exercice 2 : Dans une chaîne de fabrication, 5% des pièces sont défectueuses. On prélève une pièce, on examine si elle est défectueuse et on la replace parmi les autres. On répète 120 fois cette expérience. On désigne par X le variable aléatoire qui, à chaque tirage de 120 pièces, associe le nombre de pièces défectueuses.

1. (a) Quelle est la loi suivie par X ?
   (b) Donner ses paramètres.
   (c) Calculer $P(X = 5)$.
2. (a) Par quelle loi peut-on approcher la loi de X ? Préciser ses paramètres.
   (b) Calculer $P(X = 5)$ à l'aide de cette approximation.
   (c) Comparer les deux valeurs obtenues.

Exercice 3 : On se propose d'étudier le corps électoral d'un département.

1. Lors d'un sondage, sur un échantillon de 200 personnes, on a recueilli 84 intentions de vote en faveur d'un parti A. Soit p la proportion théorique de votes pour A. Donner un intervalle de confiance pour p au niveau 95%.
2. Avec un autre échantillon de 100 personnes, on a obtenu 45 d'intentions de vote pour A. En réunissant les deux échantillons, donner un intervalle de confiance pour p au niveau 95%.
3. Déterminer la taille n de l'échantillon qui permet d'obtenir un intervalle de confiance au niveau 95%, de largeur $0,02$, sachant qu'une estimation ponctuelle f de p a donné la valeur $0,4$.

Exercice 4 : Un atelier produit en grande série des disques dont le diamètre est supposé être 25 mm. On désigne par X la variable aléatoire qui, à chaque disque de la production, associe son diamètre en mm. On admet que X suit une loi normale de moyenne m et d'écart-type σ. Un disque est considéré comme valable si son diamètre est compris entre 24,90 mm et 25,08 mm, sinon il est considéré comme défectueux. On suppose que $\sigma = 0,04$

1. Calculer la probabilité qu'un disque pris au hasard soit défectueux dans chacun des cas suivants :
   (a) $m = 25$.
   (b) $m = 24,99$
2. On note $\overline{X}$ la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de taille 100 associe la moyenne des diamètres de ces 100 disques. Quelle est la loi suivie par $\overline{X}$?
3. On prélève au hasard et avec remise un échantillon de 100 disques dans la production. On souhaite construire un test bilatéral pour savoir si on peut considérer au risque 5% que $m = 25$.

(a) Préciser les hypothèses H_0 et H_1

(b) Sous l'hypothèse H_0, déterminer les valeurs seuil A_α et B_α pour ce test.

(c) Quelle est la règle de décision de ce test ?

(d) Pour un échantillon de 100 disques, on a une moyenne égale à 24,99. Quelle est la conclusion de ce test ?