Deuxième Année de Licence PC-C
Probabilités
2009/2010

UNIVERSITÉ de Cergy-Pontoise

Examen du 11 Mai 2010 - Corrigé -

Exercice 1 : 1. La loi de T est une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,05$. L'espérance est donnée par $E(T) = \frac{1}{0,05} = 20$.

2. La fonction de répartition de T est donnée par $F_T(x) = \int_{-\infty}^{x} 0,05e^{-0,05t}\,dt$. Si $x \leq 0$, $F_T(x) = 0$ et si $x > 0$, $F_T(x) = \int_0^x 0,05e^{-0,05t}\,dt = [-e^{-0,05t}]_0^x = 1 - e^{-0,05x}$.
3. On cherche $P(T > 24) = 1 - P(T \leq 24) = 1 - F_T(24) = e^{-0,05\times 24} \simeq 0,30$.
4. On cherche $P(T > 36/T > 12) = \frac{P(T>36 \cap T>12)}{P(T>12)} = \frac{P(T>36)}{P(T>12)} = \frac{1-F_T(36)}{1-F_T(12)} = e^{-1,2}$.

Exercice 2 : 1. (a) X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ avec $n = 120$ et $p = 0,05$.

(b) $E(X) = np = 6$ et $V(X) = np(1-p) = 5,7$.

(c) $P(X = 5) = \binom{120}{5}(0,05)^5(0,95)^{115} = 0,1633569$.

2. Ici on a $n \geq 30$, $np = 6 \leq 17$ et $p = 0,05 \leq 0,1$, on sait alors que l'on peut approcher la loi de X par une loi de Poisson $\mathcal{P}(np) = \mathcal{P}(6)$ dont l'espérance est 6 et la variance est 6.
3. A l'aide de cette approximation, on calcule $P(X = 5)$ à l'aide de la valeur $\frac{6^5e^{-6}}{5!}$ et on obtient la valeur $0,1606231$.
4. On remarque que l'aproximation donne une valeur approchée avec deux décimales exactes.

Exercice 3 : 1. Soit F la variable aléatoire qui donne la proportion d'intentions de vote pour un échantillon de taille 200. On a un échantillon de taille supérieure à 100, donc on peut considérer que F suit une loi normale $\mathcal{N}(p, \frac{p(1-p)}{n})$. Or p la proportion théorique, est inconnue. On va donc approcher la variance par la valeur $\frac{f(1-f)}{n-1}$ où f est la proportion mesurée sur un échantillon donné, ici $f = \frac{84}{200} = 0,42$. La variable aléatoire $\frac{F-p}{\sqrt{\frac{f(1-f)}{n-1}}}$ suit une loi normale centrée réduite. Pour déterminer un intervalle de confiance pour p au niveau 95%, on cherche t tel que $P(|\frac{F-p}{\sqrt{\frac{f(1-f)}{n-1}}}| \leq t) = 0,95$, c'est-à-dire $2\phi(t) - 1 = 0,95$ où ϕ est le fonction de répartition de la loi normale centrée réduite. Ceci donne $\phi(t) = 0,975$. D'après les tables, on obtient $t = 1,96$. L'intervalle de confiance est alors donné par : $[f - t\sqrt{\frac{f(1-f)}{n-1}}; f + t\sqrt{\frac{f(1-f)}{n-1}}]$. On obtient l'intervalle : $[0,42 - 1.96 \times 0,035; 0,42 + 1,96 \times 0,035] = [0,351; 0,489]$.

2. Si on réunit les deux échantillons, on obtient un échantillon de taille 300 et pour cet échantillon, il y a $84 + 45 = 129$ intentions de vote. On a alors $f = \frac{129}{300} = 0,43$. Dans ce cas, $\sqrt{\frac{f(1-f)}{n-1}} = 0,28$ et en procédant comme précédemment, l'intervalle de confiance est donné par $[0,43 - 1.96 \times 0,028; 0,43 + 1,96 \times 0,028] = [0,375; 0,485]$.
3. L'intervalle de confiance au niveau 95% est de la forme $[f - t\sqrt{\frac{f(1-f)}{n-1}}; f + t\sqrt{\frac{f(1-f)}{n-1}}]$ et la largeur est dans ce cas $2t\sqrt{\frac{f(1-f)}{n-1}}$ avec $t = 1,96$ et $f = 0,4$. On a donc la condition $3,92\sqrt{\frac{0,24}{n-1}} = 0,02$. On obtient $n = 9221$.

Exercice 4 : 1. (a) Dans le cas où $m = 25$, X suit une loi normale $\mathcal{N}(25, 0,04^2)$. La pièce est considérée comme défectueuse si $x < 24,9$ ou si $X > 25,08$. On cherche donc $P(X < 24,9) + P(X > 25,08)$. On sait que dans ce cas $Y = \frac{X-25}{0,04}$ suit une loi normale centrée réduite. On cherche donc $P(Y < \frac{24,9-25}{0,04}) + P(Y > \frac{25,08-25}{0,04})$. La valeur recherchée est $\phi(-2,5) + 1 - \phi(2) = 2 - \phi(2,5) - \phi(2) \simeq 0,029$.

(b) Avec $m = 24,99$, on obtient par des calculs similaires la valeur $2 - 2\phi(2,25) \simeq 0,025$.

2. On a un échantillon de taille 100 et on sait alors que $\overline{X}$ suit une loi normale $(m, \frac{\sigma^2}{100})$ et donc $\frac{\overline{X}-m}{0{,}004}$ suit une loi normale centrée réduite.
3. (a) Puisque l'on construit un test bilatéral, l'hypothèse H_0 est $m = 25$ et l'hypothèse H_1 est $m \neq 25$.

   (b) Sous l'hypothèse H_0, on cherche donc t tel que $P(|\frac{\overline{X}-25}{0{,}004}| \leq t) = 1 - 0,05 = 0,95$, c'est a dire $2\phi(t) - 1 = 0,95$. On obtient $\phi(t) = 0,975$, ce qui donne $t = 1,96$. Alors $A_\alpha = 25 - 1,96 \times 0,004 = 24,992$ et $B_\alpha = 25 + 1,96 \times 0,004 = 25,008$

   (c) La règle de décision du test est la suivante : si $\overline{X}$ est la moyenne mesurée pour un échantillon de taille 100, alors
   -Si $\overline{X} \in [A_\alpha, B_\alpha]$, on accepte l'hypothèse H_0 et on considère que la moyenne est 25.
   -Si $\overline{X} \notin [A_\alpha, B_\alpha]$, on rejette l'hypothèse H_0 et on considère que la moyenne n'est pas 25.

   (d) Ici $\overline{X} \notin [A_\alpha, B_\alpha]$, on rejette l'hypothèse H_0 et on considère que la moyenne n'est pas 25.