

## Examen du 12 Mai 2009

**Exercice 1 :** La densité  $f$  de la variable aléatoire  $X$  est donnée par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ C \cdot x & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ C & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ C \cdot (3 - x) & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ 0 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

1. Donner la valeur de  $C$  et dessiner le graphe de  $f$ .
2. Calculer l'espérance de  $X$ .
3. Calculer  $P(|X - 1,5| \leq 1)$  et  $P(X > 1/X > 2)$

**Exercice 2 :** Un représentant se présente dans 1000 appartements. La probabilité que ce représentant place un contrat dans un appartement quelconque est estimée à 0,04. Soit  $X$  le variable aléatoire qui compte le nombre total de contrats placés.

1. Quelle est la loi suivie par  $X$  ? Donner ses paramètres.
2. Par quelle loi peut-on approcher la loi de  $X$  ? Préciser ses paramètres.
3. Calculer  $P(X > 30)$  et  $P(X = 40)$ .

**Exercice 3 :** Ayant mesuré les poids en grammes de 1000 pots de confiture sortis successivement d'une machine à conditionner, on a classé les pots en 12 tranches de poids. Les résultats obtenus sont les suivants :

Poids	[2000 , 2002[	[2002 , 2004[	[2004 , 2006[	[2006 , 2008[	[2008 , 2010[	[2010 , 2012[
Effectifs	9	21	58	131	204	213
Poids	[2012 , 2014[	[2014 , 2016[	[2016 , 2018[	[2018 , 2020[	[2020 , 2022[	[2022 , 2024[
Effectifs	185	110	50	16	3	0

1. A partir des résultats obtenus pour cet échantillon, et en convenant que les valeurs mesurées sont regroupées au centre de chaque classe, estimer ponctuellement la moyenne, la variance avec biais et la variance sans biais du poids des pots de confiture.
2. Soit  $\bar{X}$  la variable aléatoire, qui à tout échantillon de taille 1000, associe la moyenne du poids des pots de confiture de cet échantillon. Quelle est la loi suivie par  $\bar{X}$  ? Préciser ses paramètres.
3. Donner un intervalle de confiance au risque 5% de la moyenne théorique  $\mu$  du poids de pots de confiture.
4. Déterminer  $\alpha$ , pour que, au risque  $\alpha\%$ , un intervalle de confiance soit [2010, 44; 2011, 02].

**Exercice 4 :** Le lancement d'un nouveau produit nécessitant une réorganisation complète d'un atelier (et donc des dépenses importantes), une entreprise décide de faire une étude de marché sous forme de questionnaire dont on retient en particulier l'information suivante : "La personne interrogée est ou n'est pas intéressée par le nouveau produit". Soit  $p$  la proportion (réelle mais inconnue) des personnes intéressées par le produit. L'entreprise juge raisonnable de lancer ce nouveau produit si plus de 50% de personnes sont intéressées. On décide donc de faire le test :

$$H_0 : p_0 = 0,5 \quad H_1 : p_1 > p_0$$

à partir des réponses obtenues sur un échantillon de taille 100. On privilégie l'hypothèse  $H_0$ .

1. Que représente les risques d'erreur de première et de deuxième espèce associés à ce test ?
2. Déterminer la valeur seuil associée à ce test pour un risque de première espèce  $\alpha = 1\%$ .
3. Quelle est la règle de décision de ce test ?
4. 59 personnes sur 100 déclarent être intéressées par ce nouveau produit. Quelle est la décision prise par l'entreprise ?
5. Calculer le risque de seconde espèce correspondant à la valeur suivante  $p_1 = 0,65$  dans l'hypothèse  $H_1$  si on privilégie  $H_0$  avec le risque de 1%.
6. Reprendre les questions 2, 3 et 4 avec un risque  $\alpha = 5\%$ .