Deuxième Année de Licence PC-C
Probabilités
2008/2009

UNIVERSITÉ de Cergy-Pontoise

Examen du 12 Mai 2009 - Corrigé -

Exercice 1 : 1. Puisque f est une densité de probabilité, on doit avoir $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = 1$. Ce qui donne :

$$C\int_0^1 x\,dx + C\int_1^2 dx + C\int_2^3 (3-x)\,dx = 1$$

$$C\{[\frac{x^2}{2}]_0^1 + 1 + [\frac{-(3-x)^2}{2}]_2^3\} = 1$$

On obtient finalement $C = \frac{1}{2}$

2. $E(X) = \int_{\mathbb{R}} xf(x)\,dx = \frac{1}{2}\{\int_0^1 x^2\,dx + \int_1^2 x\,dx + \int_2^3 x(3-x)\,dx = \frac{3}{2}$.
3. $P(|X-1,5|<1) = P(0,5<X<2,5) = \int_{0,5}^{2,5} f(x)\,dx = \frac{1}{2}\{\int_{0,5}^1 x\,dx + \int_1^2 dx + \int_2^{2,5}(3-x)\,dx\} = \frac{7}{8}$.
   $P(X>1/X>2) = 1$.

Exercice 2 : 1. (a) X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ avec $n=1000$ et $p=0,04$.

   (b) On a $n \geq 30$, $np = 40 \geq 15$, $np(1-p) = 38,4 \geq 5$. On peut donc approcher $\mathcal{B}(n,p)$ par une loi normale $\mathcal{N}(np, np(1-p)) = \mathcal{N}(40, 38,5)$.

2. On utilise l'approximation à l'aide de la loi normale décrite à la question précédente et on applique la correction de continuité. $P(X>30) = 1 - P(X \leq 30) \simeq 1 - \phi(\frac{30+0,5-40}{\sqrt{38,5}})$ où ϕ désigne la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.
   $P(X>30) \simeq 1 - \phi(-\frac{9,5}{\sqrt{38,5}}) \simeq \phi(\frac{9,5}{\sqrt{38,5}}) \simeq \phi(1,53) \simeq 0,937$.
   $P(X=40 \simeq \phi(\frac{0,5}{\sqrt{38,5}}) - \phi(-\frac{0,5}{\sqrt{38,5}}) \simeq 2\phi(\frac{0,5}{\sqrt{38,5}}) - 1$
   D'où $P(X=40) \simeq 2\phi(0,08) - 1 \simeq 0,063$.

Exercice 3 : 1. Le moyenne ponctuelle à partir de l'échantillon est

$$m = \frac{1}{1000}\big(2001\times 9 + 2003\times 21 + 2005\times 58 + 2007\times 131 + 2009\times 204+$$

$$2011\times 213 + 2013\times 185 + 2015\times 110 + 2017\times 50 + 2019\times 16 + 2021\times 3\big) = 2010,73$$

Soit S^2 l'estimateur avec biais de la variance. On a :

$$S^2 = \frac{1}{1000}\big(2001^2\times 9 + 2003^2\times 21 + 2005^2\times 58 + 2007^2\times 131 + 2009^2\times 204+$$

$$2011^2\times 213 + 2013^2\times 185 + 2015^2\times 110 + 2017^2\times 50 + 2019^2\times 16 + 2021^2\times 3\big) - (1010,73)^2 = 12,795$$

L'estimateur sans biais est $\tilde{S}^2 = \frac{n}{n-1}S^2 = 12,808$.

2. Notons μ la moyenne théorique. Puisque la taille de l'échantillon est supérieure à 30, on peut considérer que $\bar{X}$ suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \frac{\tilde{S}^2}{\sqrt{n}})$ (puisqu'on ne connait pas la variance, on utilise l'estimateur sans biais de la variance). La variable aléatoire $\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\tilde{S}^2}{\sqrt{n}}}$ suit une loi normale centrée réduite.
3. On cherche t tel que $P(|\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\tilde{S}^2}{\sqrt{n}}}| \leq t) = 0,95$, c'est à dire t tel que $2\phi(t) - 1 = 0,95$ où ϕ est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite. On a donc $\phi(t) = 0,975$, ce qui donne à l'aide des tables $t = 1,96$. L' intervalle de confiance est déterminé par $[2010,73 - 1,96 \times \frac{3,58}{\sqrt{1000}} ; 2010,73 + 1,96 \times \frac{3,58}{\sqrt{1000}}] = [2010,51 ; 2010,95]$.

4. Si t est tel que $P(\left|\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{S^2}{\sqrt{n}}}\right| \leq t) = 1-\alpha$, l'intervalle de confiance au risque α est alors donné par $[2010,73 - t \times \frac{3,58}{\sqrt{1000}} ; 2010,73 + t \times \frac{3,58}{\sqrt{1000}}]$. On veut que cet intervalle soit $[2010,44; 2011,02]$. En considérant l'amplitude de l'intervalle, on obtient $2t \times \frac{3,58}{\sqrt{1000}} = 0,58$, ce qui donne $t = 2,56$. On sait alors que $2\phi(t) - 1 = 1 - \alpha$. D'où $1 - \alpha = 2\phi(2,56) - 1 = 0,99$. On prend alors $\alpha = 1\%$.

Exercice 4 :

1. Le risque de première espèce α est tel que $\alpha = P(rejeter H_0/H_0 vraie)$. Le risque de première espèce est donc de rejeter à tort H_0, c'est donc de dire à tort que $p > 0,5$, ce qui entraînera des dépenses importantes alors qu'en fait p n'est pas supérieur à 0,5, et donc, d'après les critères de l'entreprise, il y aurait un faible intérêt du public pour le produit. C'est donc un risque économique pour l'entreprise.
   Le risque de deuxième espèce β est tel que $\beta = P(accepter H_0/H_1 vraie)$. Le risque de deuxième espèce est celui de ne pas réorganiser l'atelier alors qu'il y a plus de 50% de gens intéressés par le nouveau produit. Il n'y a donc pas de frais engagés mais la perpective de gains est abandonnée.
2. Soit F la variable aléatoire qui donne la fréquence de personnes intéressées par le produit dans un échantillon de 100 personnes. Puisque l'on privilégie H_0, on peut supposer que F suit une loi normale $\mathcal{N}(0,5; \frac{0,5\times0,5}{100})$ et donc que la variable aléatoire $\frac{F-0,5}{0,05}$ suit une loi normale centrée réduite. On cherche donc K_α tel que $P(F \geq K_\alpha) = \alpha$ où encore $P(\frac{F-0,5}{0,05} \geq \frac{K_\alpha - 0,5}{0,05}) = 0,01$. On obtient donc la relation $1 - \phi(\frac{K_\alpha-0,5}{0,05}) = 0,01$ ce qui donne $\phi(\frac{K_\alpha-0,5}{0,05}) = 0,99$. Par les tables, on a $\frac{K_\alpha-0,5}{0,05} = 2,33$. D'où $K_\alpha = 0,5 + 2,33 \times 0,05 = 0,616$.
3. La règle de décision de ce test est la suivante : si pour l'échantillon, la fréquence mesurée f est inférieure à $0,616$, on décide de ne pas lancer le nouveau produit (on accepte H_0) ; dans le cas contraire, on va lancer le nouveau produit car on rejette H_0 et on accepte H_1.
4. Ici on a $f = 0,59 < 0,616$, on va donc accepter l'hypothèse H_0 et ne rien changer dans la production.
5. Le risque de deuxième espèce est donné par $\beta = P(accepter H_0/H_1 vraie)$. Si on accepte H_0, on a donc $\beta = P(F \leq K_\alpha/H_1 vraie)$. Si H_1 est vraie, cela veut dire que F suit une loi normale $\mathcal{N}(0,5; \frac{0,65\times0,35}{100})$ et donc $\frac{F-0,65}{0,047}$ suit une loi normale centrée réduite. D'où $\beta = P(\frac{F-p_1}{\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n}}} < \frac{K_\alpha - p_1}{\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n}}}) = \phi(\frac{K_\alpha-p_1}{\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n}}}) = 1 - \phi(0,72) = 0,2358$.
6. Au risque 5%, par des calculs identiques à ceux de la question 2, on obtient $K_\alpha = 0,5832$. La règle de décision de ce test est donc d'accepter H_0 si la fréquence mesurée est inférieure à cette nouvelle valeur. Sinon on rejette H_0 et on accepte H_1. Or ici la fréquence mesurée est $0,59$ supérieure à K_α. On va donc accepter H_1 et rejeter H_0, ce qui veut dire qu'il y aura une réorganisation de l'atelier pour lancer le nouveau produit.