Université de Cergy-Pontoise **2006-2007**
Mathématiques **L2 PCS4**

Examen du 14 Juin 2007

Exercice 1 : Des étudiants se préparent à un examen. Trois professeurs X, Y et Z sont susceptibles de donner le sujet. D'après des statistiques des années précédentes et aussi d'après les autres charges d'examens prévus, les étudiants, ardents probabilistes (!), évaluent à :

- $0,35$ la probabilité pour que ce soit X qui pose l'examen.
- $0,4$ la probabilité pour que ce soit Y.
- $0,25$ la probabilité pour que ce soit Z.

Par ailleurs, les étudiants redoutent qu'un certain chapître "R" qu'ils ont du mal à assimiler, ne soit donné à l'examen. Fins psycologues, il évaluent à :

- $P(R/X) = 0,4$ la probabilité pour que sorte le chapître R, si c'est X qui pose l'examen.
- $P(R/Y) = 0,1$ la probabilité pour que sorte le chapître R, si c'est Y qui pose l'examen.
- $P(R/Z) = 0,82$ la probabilité pour que sorte le chapître R, si c'est Z qui pose l'examen.

Le jour "J" arrive et l'événement tant redouté se produit : le chapître R est posé à l'examen. Sachant cela, calculer les probabilités $P(X/R)$, $P(Y/R)$ et $P(Z/R)$ pour que l'examen ait été posé par X, Y ou Z.

Exercice 2 : Un lapin met au monde une portée de 9 lapereaux, comprenant deux lapereaux noirs, trois blancs et quatre tachetés. Six lapereaux s'échappent. On suppose que chaque lapereaux a la même envie et la même possibilité de prendre la clé des champs. Soit X la variable aléatoire qui, à chaque groupe de 6 lapereaux échappés, associe le nombre de lapereaux blancs qui en font partie.

1. Déterminer la loi de probabilité de X.
2. Calculer l'espérance $E(X)$ et la variance $V(X)$ de cette variable aléatoire.

Exercice 3 : On admet que la variable aléatoire qui prend comme valeurs les resultats de la pesée d'un même objet donné suit une loi normale de moyenne m et d'écart-type σ.

1. Dans cette partie, on suppose que $m = 72,40$ et $\sigma = 0,08$.
   (a) Calculer la probabilité des événements suivants :
      i. "$X > 72,45$".
      ii. "$X < 72,25$".
      iii. "$72,30 < X < 72,50$".
   (b) Déterminer le réel h strictement positif (arrondi au centième) tel que la probabilité pour que X prenne une valeur dans l'intervalle $[m-h, m+h]$ soit égale à $0,989$.
2. Dans cette partie, on suppose que m et σ sont inconnus. On a relevé dans le tableau suivant les résultats de 10 pesées d'un même objet.

Masse (g)	72,20	72,24	72,26	72,30	72,36	72,39	72,42	72,48	72,50	72,54

   (a) Calculer la moyenne et la variance de cet échantillon.
   (b) A partir des résultats obtenus pour cet échantillon, donner un estimateur sans biais de la moyenne m et un estimateur sans biais de la variance $\tilde{S}^2$ de la variable aléatoire X.
   (c) Dans la suite, on admet que la variable aléatoire Y qui, à tout échantillon de 10 pesées, associe la moyenne de ces pesées suit une loi normale. En prenant comme variance, la valeur estimée en b), donner un intervalle de confiance au risque 5% de la moyenne m.
   (d) L'écart-type de l'appareil de pesée, mesuré à partir de nombreuses mesures antérieures est en réalité, pour un objet ayant environ cette masse, de $0,08$. Dans cette question, on prend donc $\sigma = 0,08$.
      i. Donner un intervalle de confiance au risque 5% de la moyenn m.
      ii. Déterminer α, pour que, au risque α%, un intervalle de confiance au seuil α, soit $[72,31; 72,43]$.