

## Examen du 5 Mai 2008

**Exercice 1 :** Une variable aléatoire  $X$  admet pour densité la fonction suivante :  $f(x) = 6x(1-x)\mathbf{1}_{[0,1]}(x)$ . On rappelle que la fonction  $\mathbf{1}_{[0,1]}$  désigne la fonction caractéristique de l'intervalle  $[0, 1]$ . Elle vaut 1 si  $x \in \mathbf{1}_{[0,1]}$  et 0 sinon.

1. Vérifier que  $f$  est bien une densité de probabilité.
2. Calculer la fonction de répartition de  $X$ .
3. Evaluer les probabilités :  $P(X \leq \frac{1}{2})$ ,  $P(\frac{1}{3} \leq X \leq \frac{2}{3})$  et  $P(X \geq \frac{1}{6})$ .
4. Calculer l'espérance et la variance de  $X$ .

**Exercice 2 :** Un fournisseur d'accès à Internet met en place un point local d'accès, qui dessert 5000 abonnés. A un instant donné, chaque abonné a une probabilité égale à 20% d'être connecté. Les comportements des abonnés sont supposés indépendants les uns des autres.

1. On note  $X$  la variable aléatoire égale au nombre d'abonnés connectés à un instant  $t$ . Quelle est la loi de  $X$ ? Quelle est son espérance, son écart-type?
2. On pose  $Y = \frac{X-1000}{\sqrt{800}}$ . Justifier précisément qu'on peut approcher la loi de  $Y$  par la loi normale  $\mathcal{N}(0, 1)$ .
3. Le fournisseur d'accès souhaite savoir combien de connexions simultanées le point d'accès doit pouvoir gérer pour que sa probabilité d'être saturé à un instant donné soit inférieure à 2,5%. En utilisant l'approximation précédente, proposer une valeur approchée de ce nombre de connexions.

**Exercice 3 :** On a mesuré à l'aide d'un échantillon aléatoire de taille 100, la durée de vie en mois d'un type de composant électronique. On a obtenu les résultats suivants :

Durée	0 - 5	5 - 10	10 - 15	15 - 20	20 - 25	25 - 30	30 - 35
Effectifs	36	22	15	9	6	5	7

1. A partir des résultats obtenus pour cet échantillon, et en convenant que les valeurs mesurées sont regroupées au centre de chaque classe, estimer ponctuellement la moyenne, la variance avec biais et la variance sans biais de la durée de vie des composants.
2. Soit  $\bar{X}$  la variable aléatoire qui à tout échantillon de taille 100, associe la moyenne des durée de vie des composants de cet échantillon. Quelle est la loi suivie par  $\bar{X}$ ? Préciser ses paramètres.
3. Donner un intervalle de confiance au risque 5% de la moyenne de durée de vie  $\mu$  des composants produits.

**Exercice 4 :** Dans une enquête, on a demandé à 200 personnes d'identifier leur principale source d'information :

Télévision	Radio	Internet	Presse écrite
110	45	15	30

1. A l'aide de l'échantillon, donner une estimation  $f$  de la proportion  $p$  de la population qui considère la télévision comme principale source d'information.
2. Soit  $F$  la variable aléatoire qui, à tout échantillon de taille 200, associe l'estimation  $f$  de la proportion des individus de l'échantillon qui considèrent la télévision comme principale source d'information. Par quelle loi peut-on estimer  $F$ ?
3. Construire un intervalle de confiance pour la proportion  $p$  au risque 5%, puis au risque 1%.

4. On suppose maintenant que l'on a un échantillon de taille 50 avec les données suivantes :

Télévision	Radio	Internet	Presse écrite
28	10	4	8

On s'intéresse toujours à la proportion  $p$  de la population qui considère la télévision comme source principale d'information. Construire un intervalle de confiance pour cette proportion au risque 5%.

**Exercice 5 :** On s'intéresse aux allergies déclenchées par un certain médicament. Ces allergies sont détectées par des tests effectués en laboratoire. On examine un échantillon de 100 analyses choisies au hasard. On constate que 47 analyses révèlent une allergie. On veut étudier la proportion de la population où l'allergie se manifeste. On voudrait effectuer le test :

$$\begin{cases} H_0 : p_0 = 0,4 \\ H_1 : p_1 = 0,5 \end{cases}$$

1. Quelle est la région critique du test au risque de première espèce  $\alpha = 5\%$ , puis  $\alpha = 10\%$  pour l'acceptation de  $H_0$  ?
2. Quelle décision est prise dans chacun des cas ?
3. Calculer le risque de seconde espèce si on privilégie  $H_0$  avec le risque 5% alors que la proportion est en réalité  $p_1$ .