Université de Cergy-Pontoise **2006-2007**
Mathématiques **L2 PCS4**

Corrigé de l'Examen du 15 Mai 2007

Exercice 1 : 1. (a) X suit une loi uniforme de densité $f(x) = \frac{1}{30}\mathbb{1}_{[0,30]}(x)$.

(b) Pour qu'un usager attende moins de 5 minutes, il doit arriver entre 8h10 et 8h15 ou entre 8h25 et 8h30. Ces deux événements sont incompatibles. La probabilité recherchée est donc :

$$P(10 \leq X \leq 15) + P(25 \leq X \leq 30) = \int_{10}^{15} f(t)\,dt + \int_{25}^{30} f(t)\,dt = \frac{5}{30} + \frac{5}{30} = \frac{1}{3}$$

Pour qu'un usager attende plus de 10 minutes, il doit arriver entre 8h00 et 8h05 ou entre 8h15 et 8h20. Ces deux événements sont incompatibles. La probabilité recherchée est donc :

$$P(0 \leq X \leq 5) + P(15 \leq X \leq 20) = \int_{0}^{5} f(t)\,dt + \int_{15}^{20} f(t)\,dt = \frac{5}{30} + \frac{5}{30} = \frac{1}{3}$$

2. (a) Pour avoir une loi de probabilité, il faut que $\int_{\mathbb{R}} g(t)\,dt = 1$, c'est à dire $a\int_0^{30}(30-t)^2\,dt = 1$. On obtient donc la condition : $\left[-\frac{a}{3}(30-t)^3\right]_0^{30} = 1$, ce qui donne $a = \frac{1}{9000}$.

(b) Pour qu'un usager attende moins de 5 minutes, il doit arriver entre 8h10 et 8h15 ou entre 8h25 et 8h30. Ces deux événements sont incompatibles. La probabilité recherchée est donc :

$$P(10 \leq Y \leq 15) + P(25 \leq Y \leq 30) = \int_{10}^{15} g(t)\,dt + \int_{25}^{30} g(t)\,dt = \frac{475}{2700} \simeq 0,18$$

Pour qu'un usager attende plus de 10 minutes, il doit arriver entre 8h00 et 8h05 ou entre 8h15 et 8h20. Ces deux événements sont incompatibles. La probabilité recherchée est donc :

$$P(0 \leq Y \leq 5) + P(15 \leq Y \leq 20) = \int_{0}^{5} g(t)\,dt + \int_{15}^{20} g(t)\,dt = \frac{1375}{2700} \simeq 0,51$$

Exercice 2 : Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de clients du magasin. X suit donc une loi normale $\mathcal{N}(350, 900)$. Posons $T = \frac{X-350}{30}$. T suit alors une loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$.

1. On cherche $P(X \geq 400) = P(T \geq \frac{5}{3}) = 1 - \phi(\frac{5}{3}) = 1 - \phi(1,67) \simeq 0,0475$.
2. On cherche $P(X \leq 300) = P(T \leq -\frac{5}{3}) = 1 - \phi(\frac{5}{3}) = 1 - \phi(1,67) \simeq 0,0475$.
3. On cherche $P(320 \leq X \leq 380) = P(-1 \leq T \leq 1) = 2\phi(t) - 1 \simeq 0,6826$

Exercice 3 : 1. X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ avec $n = 1000$ et $p = 0,34$. L'espérance est donnée par $E(X) = np = 340$ et la variance est donnée par $V(X) = np(1-p) = 224,4$.

2. On peut approcher X par une loi normale $\mathcal{N}(np, np(1-p))$ c'est à dire $\mathcal{N}(340; 224,4)$.
3. On cherche la probabilité $P(X > 350) = 1 - P(X \leq 350)$. Soit $\tilde{X}$, la variable aléatoire continue associée à X et qui suit la loi normale $\mathcal{N}(340; 224,4)$. On procède à un ajustement en cherchant $P(\tilde{X} \leq 350,5)$. $\tilde{X}$ suit une loi $\mathcal{N}(340, 224,4)$, donc $Y = \frac{\tilde{X}-340}{14,97}$ suit une loi normale centrée réduite. Donc $P(\tilde{X} \leq 350,5) = P(Y \leq \frac{350,5-340}{14,97}) \simeq \phi(0,7) \simeq 0,7580$. Finalement, la probabilité d'avoir un nombre de chiens porteurs de la bactérie supérieur à 350 est $1 - 0,7580 \simeq 0,24$.

Exercice 4 : 1. En lisant sur l'abaque, on obtient l'intervalle $[0,05; 0,44]$.

2. Quand l'échantillon est de 300 pièces, on peut considérer que la proportion f suit une loi normale $\mathcal{N}(p, \frac{f(1-f)}{n-1})$ où $f = \frac{60}{300} = 0,2$ et donc si p désigne la proportion théorique, on sait que $\frac{p-f}{\sqrt{\frac{f(1-f)}{n-1}}} = \frac{p-0,2}{0,0023}$ suit une loi normale centrée réduite. On cherche donc t tel que $\phi(|\frac{p-f}{\sqrt{\frac{f(1-f)}{n-1}}}| < t) = 0,95$ c'est à dire $2\phi(t) - 1 = 0,95$. D'où $\phi(t) = 0,975$. A l'aide des tables, on obtient $t = 1,96$. On obtient alors l'intervalle de confiance au niveau 95% :

$$[0,2 - 1,96 \times 0,023; 0,2 + 1,96 \times 0,023] = [0,16; 0,25]$$

Exercice 5 : 1. La moyenne empirique $\bar{x} = 92,2$ est un estimateur sans biais de la moyenne μ. Par contre, la variance empirique S^2, n'est pas une estimateur sans biais de la variance de la population totale. On prend donc comme estimateur sans biais : $\tilde{S}^2 = \frac{n}{n-1} S^2 = \frac{100}{99} \times 51,4 = 51,92$.

2. (a) $\bar{X}$ suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \frac{\tilde{S}^2}{n})$.

   (b) On cherche t tel que

   $$P(|\frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{\tilde{S}^2}{n}}}| < t) = 0,99$$

   c'est à dire $2\phi(t) - 1 = 0,99$. A l'aide des tables, on obtient $t = 2,57$. De plus, $\sqrt{51,4} = 7,2$. On obtient alors :

   $$\bar{x} - 2,57 \times 0,72 \leq \mu \leq \bar{x} + 2,57 \times 0,72$$

   L'intervalle de confiance de niveau 99% est donné par

   $$[90,35; 94,05]$$

   (c) L'amplitude de l'intervalle doit être 1. On détermine d'abord t tel que $2\phi(t) - 1 = 0,95$. D'où $\phi(t) = 0,975$ et $t = 1,96$. L'intervalle de confiance au niveau 95% est donné par

   $$[92,2 - 1,96 \times \frac{7,2}{\sqrt{n}}; 92,2 + 1,96 \times \frac{7,2}{\sqrt{n}}]$$

   L'amplitude de l'intervalle est donc : $2 \times 1,96 \times \frac{7,2}{\sqrt{n}}$. On a alors la condition : $2 \times 1,96 \times \frac{7,2}{\sqrt{n}} = 1$. Ce qui donne une taille minimale de l'échantillon égale à $n = 797$.