Équations différentielles (L2–L3)

Examen du 14 avril 2023, durée : 90 minutes

Les calculatrices sont autorisées
Une rédaction succincte et propre est demandée pour une note maximale
Tous les objets connectés doivent être éteints et rangés dans les sacs

Exercice 1. (6 points)

1. Résoudre l'équation différentielle suivante munie d'une condition initiale:

$$\dot{y} = -2y + 3, \quad y(0) = 4.$$

2. Calculer l'intégrale

$$\int_0^1 xe^x \,\mathrm{d}x.$$

Il est indispensable d'indiquer votre choix de deux problèmes (sur trois)

Problème 2. (7 points) Trouver toutes les courbes représentables comme le graphe d'une fonction $y = f(x)$, avec une fonction f croissante strictement positive, telles que l'aire du triangle formé par une tangente, l'ordonnée du point de tangence et l'axe des abscisses soit une constante égale à a^2.

Problème 3. (7 points) Un réservoir contient une solution de 100 litres d'eau mélangée à 10 kg de sel. L'eau coule dans le réservoir, se mélange à la solution et sort à la même vitesse de 5 litres à la minute. Déterminer la quantité de sel que contiendra le réservoir au bout d'une heure.

Problème 4. (7 points) Combien de temps l'eau, contenue dans un réservoir cylindrique de diamètre $D = 1.8\,\mathrm{m}$ et de hauteur $H = 2.45\,\mathrm{m}$, mettra-t-elle à s'échapper par un orifice de diamètre $d = 3\,\mathrm{cm}$ pratiqué à son fond. L'axe du cylindre est vertical, et l'on admet que le fluide s'écoule du réservoir à une vitesse de $0.6\sqrt{2gh}$, où $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$ et h désigne la hauteur du niveau d'eau au dessus de l'orifice.

Tournez la page SVP

Indications

Indications pour le problème 2. On note $I \subset \mathbb{R}$ l'intervalle de définition de la fonction f. On cherche ainsi une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ strictement positive et croissante qui vérifie la propriété géométrique décrite dans l'énoncé.

1. Pour $x \in I$, écrire l'équation de la droite tangente au graphe de la fonction au point $(x, f(x))$.
2. Trouver le point d'intersection de la droite tangente avec l'axe des abscisses.
3. Trouver l'aire du triangle.
4. Montrer que f doit vérifier l'équation différentielle
$$\frac{f^2(x)}{2f'(x)} = a^2.$$
5. Trouver la solution générale de l'équation obtenue.

□

Indications pour le problème 3. Soit $s(t)$ la quantité du sel dans la solution à l'instant t et $\rho(t)$ la quantité du sel dans un litre d'eau.

1. Trouver une relation entre $s(t)$ et $\rho(t)$.
2. Étudier la variation de $s(t)$ entre les instants t et $t + \Delta t$.
3. Montrer que $s(t)$ doit vérifier l'équation différentielle $\dot{s} = -s/20$.
4. Établir une condition initiale pour s à l'instant $t = 0$.
5. Résoudre l'équation différentielle.

□

Indications pour le problème 4. Soit S l'aire de la base du réservoir, s l'aire de l'orifice, $h(t)$ la hauteur de l'eau dans le réservoir à l'instant t et $v(t)$ sa vitesse d'écoulement.

1. Écrire de formule pour S, s et $v(t)$.
2. Montrer que, sur un petit intervalle de temps $[t, t + \Delta t]$, on a l'égalité approchée $S\big(h(t) - h(t + \Delta t)\big) = v(t)(\Delta t)s$.
3. En déduire une équation différentielle aux variables séparables pour h.
4. Résoudre l'équation différentielle avec une condition initiale bien choisie.
5. Trouver une formule pour l'instant T quand le réservoir sera vide et calculer sa valeur approchée.

□