Examen Final : Séries

Durée : 3h00

Les calculatrices et les documents sont interdits

Dans les exercices et le problème, on pourra admettre les résultats d'une question pour faire les questions suivantes.
Le barême est donné à titre indicatif, il est susceptible de changer.

Question de cours(3pt)

Rappeler la définition de la convergence simple d'une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur I vers une fonction f sur un intervalle I.

Montrer que si une suite de fonctions paires $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur $\mathbb{R}$ converge simplement vers une fonction f sur $\mathbb{R}$ alors f est paire.

Exercice 1 Séries numériques(6pts)

1)(1,5pts) Donner la nature de la série de terme général $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{n+\sqrt{n}}{n^2+n+1}.$$

2)(3pts) On définit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ en posant pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$v_n = \frac{n!}{(2n)^n}.$$

a) Montrer que $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{1}{2(1+\frac{1}{n})^n}$.

b) En déduire que $\left(\dfrac{v_{n+1}}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ admet une limite que l'on précisera.

c) Quelle est la nature de la série de terme général $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$?

3)(1,5pts) Donner la nature de la série de terme général $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, w_n = (-1)^n\ \frac{n+1}{n^2}.$$

Exercice 2 Séries entières (5pts)

On considère la série entière $\sum a_n x^n$ avec $a_0 = 1$ et $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ pour tout $n \geq 1$.

1) Donner le rayon de convergence, R, de la série entière $\sum a_n x^n$. Précisez si la série converge en R ou $-R$.

On note alors, quand la série converge, $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

2) Rappeler pourquoi f est dérivable sur $]-R,R[$. Exprimer f' à l'aide d'une série entière.

3) En déduire une expression explicite de f' puis de f.

Exercice 3 Séries de fonctions (6pts)

On souhaite étudier la série de fonctions définies sur $]-1,1]$ de terme général $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ où

$$\forall x \in]-1,1], \quad f_n(x) = \frac{1}{n^\alpha} x^{2n}(1-x),$$

et $\alpha > 0$ est un réel fixé.

1)(1,5pts) Etude de la convergence simple sur $]-1;1]$.

a) Étudier la convergence des deux séries numériques $\sum f_n(0)$ et $\sum f_n(1)$.

b) Soit $x \in]-1,0[\cup]0,1[$ fixé. En utilisant le critère de d'Alembert, préciser pour quelles valeurs de α, la série numérique $\sum f_n(x)$ converge.

c) Pour quelles valeurs de α la série est-elle simplement convergente sur $]-1,1]$?

2)(1pt) Tableau de variation sur]-1,1].

Soit $n \geq 1$ fixé, donner le tableau de variation de la fonction f_n sur $]-1,1]$.

3) (1,5pts) Etude de la convergence normale sur]-1,0].

a) En utilisant le tableau de variation précédent, montrer qu'il existe une constante C, que l'on précisera, telle que $\sup\limits_{x\in]-1,0]} |f_n(x)| = \dfrac{C}{n^\alpha}$.

b) Pour quelles valeurs de α la série est-elle normalement convergente sur $]-1,0]$?

4)(2pts) Etude de la convergence normale sur [0,1].

a) Soit $n \geq 1$ fixé, en utilisant la question 2) donner le maximum de f_n sur $[0,1]$.

b) Montrer que la suite $\left(\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers une limite l que l'on précisera.

c) En déduire qu'il existe un réel $k > 0$ tel que $\sup\limits_{x\in[0,1]} |f_n(x)| \sim \dfrac{k}{n^{\alpha+1}}$ (on pourra écrire $(\frac{2n}{2n+1})^n$ en fonction de $(1+\frac{1}{2n})^n$).

d) Pour quelles valeurs de α la série est-elle normalement convergente sur $[0,1]$?