Examen Final : Séries

Correction

Question de cours(3pt)

Rappeler la définition de la convergence simple d'une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur I vers une fonction f sur un intervalle I.

On dit qu'une suite de de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur I convergent simplement vers une fonction f sur l'intervalle I si pour tout $x \in I$, les suites numériques $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers $f(x)$.

Montrer que si une suite de fonctions paires $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur $\mathbb{R}$ converge simplement vers une fonction f sur $\mathbb{R}$ alors f est paire.

Par hypothèses, pour tout $x \in \mathbb{R}$ on sait :

- pour tout n, $f_n(x) = f_n(-x)$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(-x) = f(-x)$

donc par unicité de la limite on a $f(x) = f(-x)$. Donc f est paire.

Exercice 1 Séries numériques(6pts)

1)(1,5pts) *Donner la nature de la série de terme général $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par*

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{n+\sqrt{n}}{n^2+n+1}.$$

On vérifie facilement que $u_n \sim \dfrac{1}{n}$ or par Riemann, on sait que la série numérique $\sum \frac{1}{n}$ diverge. Donc par comparaison de séries numériques à termes généraux de signe constant, $\sum u_n$ diverge.

2)(3pts) *On définit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ en posant pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,*

$$v_n = \frac{n!}{(2n)^n}.$$

a) *Montrer que* $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{1}{2(1+\frac{1}{n})^n}$.

Par définition on a

$$\begin{aligned}
\frac{v_{n+1}}{v_n} &= \frac{(n+1)!}{\big(2(n+1)\big)^{(n+1)}} \times \frac{(2n)^n}{n!} \\
&= \frac{(n+1).n!}{2^{(n+1)}(n+1)^{(n+1)}}.\frac{2^n.n^n}{n!} \\
&= \frac{(n+1).n^n}{2(n+1)\big(n+1\big)^n} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \\
&= \frac{1}{2(1+\frac{1}{n})^n}
\end{aligned}$$

b) *En déduire que* $\left(\dfrac{v_{n+1}}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *admet une limite que l'on précisera.*

On sait que la suite numérique $\left((1+\frac{1}{n})^n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers e. Donc $\left(\dfrac{v_{n+1}}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\dfrac{1}{2e}$.

c) *Quelle est la nature de la série de terme général* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *?*

On vient de montrer que $\left(\dfrac{v_{n+1}}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ admet une limite $l<1$ donc par le critère de d'Alembert la série numérique $\sum v_n$ converge.

3)(1,5pts) *Donner la nature de la série de terme général* $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *définie par*

$$\forall n\in\mathbb{N}^*, w_n = (-1)^n\ \frac{n+1}{n^2}.$$

On reconnait une série alternée. En notant que $|w_n| = \dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}$, il est immédiat que la suite $(|w_n|)_{n\in\mathbb{N}^*}$ décroit vers 0. Donc la série numérique $\sum w_n$ converge.

Exercice 2 Séries entières (5pts)

On considère la série entière $\sum a_n x^n$ avec $a_0 = 1$ et $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ pour tout $n\geq 1$.

1) *Donner le rayon de convergence,* R*, de la série entière* $\sum a_n x^n$*. Précisez si la série converge en* R *ou* $-R$*.*

On peut utiliser le critère de d'Alembert pour les séries entières. On vérifie facilement que la suite $\left(\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers -1, or dans ce cas $R = \dfrac{1}{\lim|\frac{a_{n+1}}{a_n}|} = 1$.

Pour $x=1$, on étudie la série numérique $\sum \dfrac{(-1)^n}{n}$ qui selon le critère des séries alternées converge.

Pour $x=-1$, on étudie la série numérique $\sum \dfrac{1}{n}$ qui selon les séries Riemann diverge.

On note alors, quand la série converge, $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

2) *Rappeler pourquoi* f *est dérivable sur* $]-R,R[$*. Exprimer* f' *à l'aide d'une série entière.*

On sait que les séries entières sont C^∞ à l'intérieur du disque de convergence. f est donc dérivable sur $]-1,1[$.

De plus on sait que pour tout $x\in]-1,1[$, $f'(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n\frac{(-1)^n}{n}x^{(n-1)}$. Donc pour tout $x\in]-1,1[$

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{(n+1)}x^n.$$

3) *En déduire une expression explicite de* f' *puis de* f*.*

Selon l'expression précédente, on peut écrire pour tout $x\in]-1,1[$

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n, \\ &= \frac{-1}{1+x}\text{(c'est une série géométrique de raison } -x). \end{aligned}$$

On en déduit qu'il existe une constante telle que $f(x) = -\ln(1+x) + k$. Or $f(0) = a_0 = 1$, on en déduit que pour tout $x \in]-1, 1]$,

$$f(x) = 1 - \ln(1+x).$$

Exercice 3 Séries de fonctions (6pts)

On souhaite étudier la série de fonctions définies sur $]-1,1]$ de terme général $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ où

$$\forall x \in]-1,1], \quad f_n(x) = \frac{1}{n^\alpha} x^{2n}(1-x),$$

et $\alpha > 0$ est un réel fixé.

1)(1,5pts) Etude de la convergence simple sur $]-1;1]$.

a) *Étudier la convergence des deux séries numériques* $\sum f_n(0)$ *et* $\sum f_n(1)$.

On remarque que pour tout n, $f_n(0) = f_n(1) = 0$, donc les deux séries numériques $\sum f_n(0)$ et $\sum f_n(1)$ convergent (elles sont constantes à 0).

b) *Soit* $x \in]-1,0[\cup]0,1[$ *fixé. En utilisant le critère de d'Alembert, préciser pour quelles valeurs de* α*, la série numérique* $\sum f_n(x)$ *converge.*

On obtient par un simple calcul que $\dfrac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} = x^2\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^\alpha$. Donc la suite $\left(\dfrac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers x^2. Comme $x \in]-1,0[\cup]0,1[$, $x^2 < 1$ et par le critère de d'Alembert, la série numérique $\sum f_n(x)$ converge pour tout α.

c) *Pour quelles valeurs de* α *la série est-elle simplement convergente sur* $]-1,1]$ *?*

On vient de vérifier que pour tout $\alpha > 0$ (en fait c'est même vrai pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$), et pour tout $x \in]-1,1]$ $\sum f_n(x)$ converge. Donc pour tout $\alpha > 0$, la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $]-1,1]$.

2)(1pt) Tableau de variation sur]-1,1].

Soit $n \geq 1$ *fixé, donner le tableau de variation de la fonction* f_n *sur* $]-1,1]$.

La fonction f_n est dérivable. En notant que pour tout $x \in]-1,1]$ $f_n(x) = \dfrac{1}{n^\alpha}(x^{2n} - x^{2n+1})$ on en déduit

$$\begin{aligned} f_n'(x) &= \frac{1}{n^\alpha}(2nx^{2n-1} - (2n+1)x^{2n}) \\ &= \frac{1}{n^\alpha}x^{2n-1}(2n - (2n+1)x). \end{aligned}$$

f_n' s'annule donc en 0 et $\dfrac{2n}{2n+1}$. f_n est décroissante sur $]-1,0]$, croissante sur $[0, \frac{2n}{2n+1}]$ et décroissante sur $[\frac{2n}{2n+1}, 1]$.

3) (1,5pts) Etude de la convergence normale sur]-1,0].

a) *En utilisant le tableau de variation précédent, montrer qu'il existe une constante* C*, que l'on précisera, telle que* $\sup_{x\in]-1,0]} |f_n(x)| = \dfrac{C}{n^\alpha}$.

Selon l'étude précédente pour tout n, f_n est décroissante sur $]-1,0]$, on en déduit que $\sup_{x\in]-1,0]} |f_n(x)| = f_n(-1) = \dfrac{2}{n^\alpha}$. On obtient bien le résultat attendu avec $C = 2$.

b)*Pour quelles valeurs de* α *la série est-elle normalement convergente sur* $]-1,0]$ *?*

Par défintion la série converge normalement sur $]-1,0]$ si $\sum \sup_{x\in]-1,0]} |f_n(x)|$ converge et donc si et seulement $\sum \frac{2}{n^\alpha}$ converge. Selon le résultats sur les séries de Riemann, on en déduit que la série converge normalement sur $]-1,0]$ si et seulement si $\alpha > 1$.

4)(2pts) Etude de la convergence normale sur [0,1].

a)*Soit $n \geq 1$ fixé, en utilisant la question 2) donner le maximum de f_n sur* $[0,1]$.

Selon les variations sur $[0,1]$, le maximum est atteint en $\frac{2n}{2n+1}$ et vaut donc

$$\begin{aligned} f_n(\tfrac{2n}{2n+1}) &= \frac{1}{n^\alpha}\left(\frac{2n}{2n+1}\right)^{2n}\left(1-\frac{2n}{2n+1}\right) \\ &= \frac{1}{n^\alpha}\left(\frac{2n}{2n+1}\right)^{2n}\frac{1}{2n+1} \end{aligned}$$

b)*Montrer que la suite* $\left(\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *converge vers une limite l que l'on précisera.*

En notant que $\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n = \exp(n\ln(1+\frac{1}{2n}))$ et en utilisant le développement limité $\ln(1+x) = x + o(x)$ au voisinage de 0, on en déduit que $\left(\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $e^{\frac{1}{2}}$.

c)*En déduire qu'il existe un réel $k > 0$ tel que* $\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)| \sim \frac{k}{n^{\alpha+1}}$ (on pourra écrire $(\frac{2n}{2n+1})^n$ en fonction de $(1+\frac{1}{2n})^n$).

Selon la question 4-a),

$$\begin{aligned} \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)| &= \frac{1}{n^\alpha}\left(\frac{2n}{2n+1}\right)^{2n}\frac{1}{2n+1} \\ &= \frac{1}{n^\alpha}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{2n}}\right)^{2n}\frac{1}{2n+1} \\ &\sim \frac{1}{2en^{\alpha+1}} \end{aligned}$$

car selon la question précédente $\left(\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers e.

On obtient le résultat attendu avec $k = \frac{1}{2e}$.

d)*Pour quelles valeurs de α la série est-elle normalement convergente sur* $[0,1]$ *?*

Selon la question précédente la série converge normalement sur $[0,1]$, si et seulement si $\alpha + 1 > 1$ soit pour $\alpha > 0$.