Université de Cergy-Pontoise, Mathématiques L2 intégration.

Examen du 17 juin 2014, 2h.

Les documents, téléphones, tablettes et calculettes sont interdits.

On rappelle que, sauf mention contraire explicite, toute réponse devra être justifiée. Des réponses correctes mal justifiées peuvent certes rapporter des points mais pas le maximum. Dans un exercice, on pourra utiliser les résultats des questions précédentes même si celles-ci n'ont pas été traitées. Le barème sur 20 est indicatif.

Début de l'épreuve.

Exercice 1. : (5 pts). Étudier la convergence des intégrales généralisées suivantes :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{t^8}\,, \qquad \int_0^1 \frac{e^t - 1}{t}\,dt\,, \qquad \int_0^{+\infty} e^{(t^2)}\,dt\,, \qquad \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^5}\,dt\,.$$

Exercice 2. : (6 pts). Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par $f(x;y;z) = |z| + \sqrt{x^2+y^2}$. Soit

$$I \;=\; \iiint_\Omega f \qquad \text{où} \qquad \Omega \;=\; \{(x;y;z) \in \mathbb{R}^3; z \in [-1;1], z^2 \geq x^2+y^2\}\,.$$

1. Montrer que f est continue.
2. Pour $R \geq 0$, on note par D_R le disque de centre $(0;0)$ et de rayon R. Montrer que
$$I \;=\; \int_{-1}^{1} I_{|z|}\,dz \qquad \text{où} \qquad I_{|z|} \;=\; \iint_{D_{|z|}} f(x;y;z)\,dxdy\,.$$
3. Pour $z \in [-1;1]$, calculer $I_{|z|}$ (on pourra utiliser un changement de variables).
4. Calculer I.

Exercice 3. : (7 pts).

1. Soit $\omega = Pdx + Qdy$ une forme différentielle C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et $\gamma : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée C^1 par morceaux. Donner la définition de l'intégrale curviligne $\int_\gamma \omega$.
2. On considère la forme différentielle ω définie sur $\mathbb{R}^2$ par
$$\omega(x;y) \;=\; e^{x-y}(x+1)\,dx \;-\; e^{x-y}x\,dy\,.$$
Montrer qu'elle est C^1 sur $\mathbb{R}^2$. Vérifier qu'elle est fermée sur $\mathbb{R}^2$.
3. On considère la courbe paramétrée C^1 par morceaux $\gamma : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $\gamma(t) = (t;-t)$ si $0 \leq t \leq 1/2$ et $\gamma(t) = (t;t-1)$ si $1/2 \leq t \leq 1$. Donner, sur un dessin, l'allure de l'image de γ et le sens de parcours.
4. Pour ω définie au 2. et γ définie au 3., calculer l'intégrale curviligne $\int_\gamma \omega$.

Tournez, SVP.

Exercice 4. : (8 pts). Étant donnée une fonction $f : [0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, continue par morceaux et bornée, on construit une nouvelle fonction notée Lf sur $]0; +\infty[$ donnée par :

$$(Lf)(x) \;=\; \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-xt}\, dt\;.$$

1. Vérifier que Lf est bien définie sur $]0; +\infty[$.
2. Montrer que Lf est dérivable sur $]0; +\infty[$ et que $(Lf)' = -(Lf_1)$ où $f_1 : [0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ est donnée par $f_1(t) = tf(t)$.
3. Étudier les limites $\lim\limits_{x \to +\infty} (Lf)(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} (Lf)'(x)$.
4. Pour $f = \mathbb{1}_{[0;1]}$, la fonction caractéristique de l'intervalle $[0; 1]$, donner une expression de Lf.
5. Pour $f : [0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par $f(t) = \sin t$, donner une expression de Lf.

Fin de l'épreuve.