L2-S4
2013–2014
Intégration

Examen
Première session mai 2014
3 heures
Documents et machines interdits
Barême à titre indicatif

La notation prendra en compte la justification des réponses et le soin apporté à la rédaction.

Exercice 1. (7 points)

a) Étudier la convergence de

$$I_1 = \int_0^1 \frac{e^t}{t}\,\mathrm{d}\,t \ , \ I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^3}\,\mathrm{d}\,t \ , \ I_3 = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}\,t \ .$$

b) Étudier la convergence et calculer

$$I_4 = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2(t+1)}\,\mathrm{d}\,t \ .$$

c) Montrer que l'intégrale

$$F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\sin^3(xt)\,\mathrm{d}\,t$$

définit une fonction continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2. (6 points) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2 vérifiant

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \ .$$

On note $a = f(0,0)$. Pour $r > 0$, on pose

$$F(r) = \int_0^{2\pi} f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))\mathrm{d}\theta \ .$$

a) Montrer que F est dérivable sur $]0,+\infty[$ et montrer que

$$F'(r) = \int_0^{2\pi} \cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) + \sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos(\theta), r\sin(\theta))\,\mathrm{d}\,\theta \ .$$

Soit $B(r)$ le disque de centre 0 et de rayon r, et Γ_r son bord parcouru dans le sens positif.

b) Énoncer la formule de Green–Riemann pour une 1-forme u, $B(r)$ et Γ_r.

c) Écrire $rF'(r)$ comme l'intégrale curviligne sur Γ_r d'une forme ω que l'on précisera. Calculer cette intégrale.

d) En déduire F en fonction de a.

e) En utilisant les coordonnées polaires, en déduire la valeur de

$$\iint_{B(r)} f \ .$$

Exercice 3. (12 points)

On note $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues, bornées, telles que $\int_{-\infty}^{+\infty} |f|$ converge.

a) Rappeler ce que signifie que $\int_{-\infty}^{+\infty} |f|$ converge.

Pour $f, g \in \mathcal{F}$, on définit $f * g$, le *produit de convolution* de f et g, par : pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)\,\mathrm{d}\,t\ .$$

b) Dans cette question, $f, g, h \in \mathcal{F}$.

(1) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)\,\mathrm{d}\,t = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}\,t\ .$$

(2) Montrer que $f * g$ est une fonction bien définie sur $\mathbb{R}$, continue et bornée.

(3) Montrer que $f * g = g * f$.

(4) Montrer que si f est dérivable, et $f' \in \mathcal{F}$, alors $f * g$ est dérivable, et

$$(f * g)' = f' * g\ .$$

c) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = \begin{cases} f_n(x) = -n^2x + n & , x \in [0, 1/n] \\ f_n(x) = n^2x + n & , x \in [-1/n, 0] \\ f_n(x) = 0 & , |x| \geq \frac{1}{n} \end{cases} .$$

(1) Dessiner le graphe de f_n pour $n = 2$, $n = 3$ et un n plus grand de votre choix. Vérifier que l'intégrale généralisée $\int_{-\infty}^{+\infty} f_n$ converge et la calculer.

(2) Soit g continue sur $\mathbb{R}$. Vérifier que $f_n * g$ est bien définie sur $\mathbb{R}$ et que $(f_n * g)_n$ converge simplement vers g. (Indications : on utilisera la valeur de $\int_{-\infty}^{+\infty} f_n$. On remarquera aussi que f_n est nulle en dehors d'un intervalle.)

Fin de l'épreuve