L2-S4
2012-2013
Intégration

UNIVERSITÉ de Cergy-Pontoise

Examen
Deuxième session juin 2013
2 heures
Documents et machines interdits
Barême à titre indicatif

Exercice 1. Vrai ou faux (5 points). Indiquer si la proposition est vraie ou fausse, sans justification. + 1 point par réponse juste. -1 point par réponse fausse ! Note minimale : 0.

(1) Calculer une intégrale double revient à calculer deux intégrales simples.
(2) Sur un ouvert, une 1-forme fermée est toujours exacte.
(3) L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t dt$ vaut 0.
(4) L'intégrale sur $[-1,1]$ de la fonction qui vaut -1 sur $[-1,0[$, 0 en 0, 1 sur $]0,1]$ vaut 0.
(5) La 1-forme $x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y$ est exacte sur le disque unité.

Exercice 2. (2 points) Calculer, en utilisant les sommes de Riemann, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{n^2+k^2}$.

Exercice 3. (4 points) Pour $z \in \mathbb{R}$, on note par D_z le disque du plan de centre $(0;0)$ et de rayon $1+z$. Soit $C = \{(x;y;z) \in \mathbb{R}^3; z \in [0;1], (x;y) \in D_z\}$ et V son volume.

a) Dessiner C.

b) Expliquer pourquoi on a la formule

$$V = \int_0^1 \left(\iint_{D_z} dxdy \right) dz.$$

c) Calculer V.

Exercice 4. (3 points) Soit $r > 1$ et E_r l'extérieur du disque de rayon r et de centre 0 du plan. Soit $t > r$ et $C_r(t)$ la couronne

$$C_r(t) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | r^2 \leq x^2 + y^2 \leq t^2\}.$$

a) En utilisant les coordonées polaires, transformer

$$\iint_{C_r(t)} \frac{dxdy}{\|(x,y)\|^\alpha},$$

où $\alpha > 0$ et $\|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2}$, en une intégrale simple.

b) Pour quelles valeurs de α

$$\lim_{t\to\infty} \iint_{C_r(t)} \frac{dxdy}{\|(x,y)\|^\alpha}$$

existe ?

Exercice 5. (7 points) On va étudier la fonction

$$F(x) = \int_1^{+\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{t}{x}\right) \frac{x}{t^2} dt$$

avec $x > 0$. On rappelle que arctg tend vers $\frac{\pi}{2}$ en $+\infty$.

a) (1 pt) Montrer que F est bien définie.

b) (1,5 pt) Montrer que F est continue.

c) (2 pt) Montrer que F est C^1 et donner une expression de sa dérivée.

d) (1,5 pt) Montrer, en faisant soigneusement une intégration par partie, que, pour tout $x > 0$,

$$\int_1^{+\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{t}{x}\right) \frac{1}{t^2} dt = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right) + \int_1^{+\infty} \frac{1}{1 + \frac{t^2}{x^2}} \frac{1}{xt} dt.$$

e) (0,5 pt) En déduire que pour tout $x > 0$, $F'(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right)$.

f) (0,5 pt) En déduire une expression intégrale de F.

Question bonus, 2 points : Montrer que $\lim_{x \to 0^+} F(x) = 0$.

Fin de l'épreuve