L2-S4
2012-2013
Intégration

Examen
Première session avril 2013
3 heures
Documents et machines interdits
Barême à titre indicatif

Exercice 1. Vrai ou faux (5 points). Indiquer si la proposition est vraie ou fausse, sans justification. + 1 point par réponse juste. -1 point par réponse fausse ! Note minimale : 0.

(1) Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$. Si f tend vers 0 en $+\infty$, alors $\int_0^{+\infty} f$ converge.
(2) Une fonction continue par morceaux sur un segment a une primitive.
(3) Si Ω est un ensemble quarrable du plan, l'intégrale double de la fonction constante égale à 1 sur Ω est égale à l'aire de Ω.
(4) L'intégrale sur $[0,1]$ de la fonction qui vaut 1 sur $[0,1/4[$, 2 en $1/4$, $1/2$ sur $]1/4,3/4]$ et -1 sur $]3/4,1]$ vaut $1/4$.
(5) La 1-forme $y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y$ est exacte sur le disque unité.

Exercice 2. (3,5 points) Soit $f : [1,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\int_1^{+\infty} f(t)dt$ converge. Soit $F : [1,+\infty[\to \mathbb{R}$, $F(x) = \int_1^x f$.

a) F est-elle continue ? Dérivable ? Convergente en $+\infty$? Bornée ? Justifier chacune des réponses.

b) En utilisant une intégration par partie, faire apparaitre F dans

$$\int_1^X \frac{f(t)}{t^\alpha} dt,$$

où $X > 1$ et $\alpha > 0$.

c) En déduire que pour tout nombre réel $\alpha > 0$, l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t^\alpha} dt$$

converge.

Exercice 3. (5 points) Soit $w = x^2\mathrm{d}x - xy\mathrm{d}y$.

a) Calculer l'intégrale curviligne de w le long du segment orienté de $(0,0)$ à $(1,1)$.

b) Calculer l'intégrale curviligne de w le long de l'arc de parabole $y = x^2$, $0 \leq x \leq 1$, orienté dans le sens des x croissants.

c) Dessiner les deux courbes. Elles délimitent un domaine U. Calculer l'intégrale de w le long du bord de U orienté dans le sens direct. En utilisant un théorème du cours, en déduire si w est fermée ou non.

d) Répondre à la question précédente en utilisant la définition.

e) Donner deux arguments différents pour montrer que w n'est pas exacte.

f) Peut-on savoir si w est fermée ou pas en sachant qu'elle n'est pas exacte ? (utiliser un théorème du cours)

Exercice 4. (7,5 points)

a) Soit $D = \{(t,z) \in \mathbb{R}^2, |t| + |z| \leq \frac{1}{2}\}$, $k, q \in \mathbb{N}^*$, q pair, $k \leq 3$. On pose

$$J = \iint_D (1+t)^k z^q dtdz.$$

(1) Dessiner D.
(2) Énoncer le théorème de Fubini.
(3) En utilisant Fubini, montrer que

$$J = \frac{2}{q+1} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (1+t)^k \left(\frac{1}{2} - |t|\right)^{q+1} dt.$$

b) Soit $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, y \geq 0, |\sqrt{x^2+y^2} - 1| + |z| \leq \frac{1}{2}\}$. On pose

$$I = \iiint_\Omega x^{k-2} y z^q dxdydz.$$

On définit

$$\begin{array}{rccc} F & : & [0,\pi] \times D & \to & \Omega \\ & & (\theta, t, z) & \mapsto & ((1+t)\cos(\theta), (1+t)\sin(\theta), z) \end{array}.$$

(1) Dessiner Ω.
(2) Vérifier que F est bien à valeur dans Ω. Dans la suite on admet que F est une bijection.
(3) Calculer le jacobien de F.
(4) Énoncer la formule de changement de variables en dimension 3.
(5) En utilisant le changement de variables donné par F et un autre théorème du cours, montrer que

$$I = \frac{2}{k-1} J.$$

Exercice 5. (Bonus (1 point) Donner la valeur de l'intégrale double de la fonction $f(x,y) = \ln(x^2 \tan(\sqrt{y}))$ sur $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | (x+1)^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0\}$.

Fin de l'épreuve