Université de Cergy-Pontoise, Mathématiques L2 intégration.

Contrôle continu du 6 mars 2012 (1h 10 min.).

Les documents, téléphones, tablettes et calculettes sont interdits.
Interrogation notée sur 20, le barème est indicatif. Dans un exercice, on pourra utiliser les résultats des questions précédentes même si celles-ci n'ont pas été traitées.

Exercice 1. : (5 pt). Questions de cours.

1. Donner la valeur de l'intégrale de la fonction en escalier $\varphi : [0;3] \longrightarrow \mathbb{R}$ qui, à $x \in [0;1]$, associe 3, à $x \in [1;2]$ associe -2 et, à $x \in [2;3]$, associe 0.
2. Compléter l'énoncé suivant pour en faire un énoncé correct du cours : $\cdots$ Si, pour tout $x \geq a$, $f(x) \leq g(x)$ alors
$$\left(\int_a^{+\infty} g \text{ converge } \Longrightarrow \int_a^{+\infty} f \text{ converge}\right) \text{ et } \left(\cdots \Longrightarrow \cdots\right).$$
3. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que la fonction $F_a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $F_a(x) = \int_a^x f(t)dt$ est dérivable et de dérivée f.

Exercice 2. : (7 pts). Pour $x > 0$, soit
$$F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt^2}\, dt\,.$$

1. Soit $a > 0$. Montrer que, sur $[a;+\infty[$, F est bien définie, dérivable et que
$$F'(x) = -\int_0^{+\infty} t^2 e^{-xt^2}\, dt\,. \qquad (1)$$
2. Comme a était arbitraire, F est définie et dérivable sur $]0;+\infty[$ et la formule (1) est valable sur $]0;+\infty[$. Montrer en utilisant une intégration par parties que
$$\forall x > 0\,,\ 2xF'(x) + F(x) = 0\,. \qquad (2)$$
3. En déduire une expression explicite de F en fonction de x. On pourra admettre que $F(1) = \sqrt{\pi}/2$.

Exercice 3. : (4 pts). Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par, pour tout $n > 0$,
$$u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{7n-2k} \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{7n-2k} + \frac{k}{n^4}\right).$$

Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et déterminer sa limite. En déduire l'existence et la valeur de la limite de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 4. : (6 pts). Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux et 1-périodique. Cette dernière propriété signifie que $(\forall t \in \mathbb{R}\,,\, f(t+1) \;=\; f(t))$. On pourra utiliser sans démonstration la propriété suivante qui découle de la 1-périodicité par récurrence :

$$\forall p \in \mathbb{Z}\,, \forall t \in \mathbb{R}\,,\; f(t+p) \;=\; f(t)\,. \tag{3}$$

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = \int_x^{x+1} f(t)dt$.
On pourra aussi utiliser la formule de changement de variables suivante (plus générale que celle du cours) : Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et I, J des intervalles. Soit $h \in C^1(I;J)$ et $g \in C^0_m(J;\mathbb{K})$ (i.e. g est continue par morceaux sur J). Pour $a, b \in I$,

$$\int_a^b g\big(h(t)\big)h'(t)dt \;=\; \int_{h(a)}^{h(b)} g(s)ds\,. \tag{4}$$

1. Dessiner le graphe sur $[-1;2]$ d'une fonction continue et non constante f_1 qui est 1-périodique. Dessiner le graphe sur $[-1;2]$ d'une fonction continue par morceaux f_2 qui est 1-périodique et qui n'est pas continue.
2. Dans cette question seulement, on suppose f continue. Montrer que F est dérivable et calculer F'.
3. On ne suppose plus f continue. F est-elle dérivable ?

Université de Cergy-Pontoise, Mathématiques L2 intégration.

Corrigé du contrôle continu du 6 mars 2012.

Exercice 1 :

1. L'intégrale est par définition égale à $3(1-0)+(-2)(2-1)+0(3-2)=1$.
2. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f, g : [a;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ continues par morceaux et positives. Si, pour tout $x \geq a$, $f(x) \leq g(x)$ alors
$$\left(\int_a^{+\infty} g \text{ converge } \Longrightarrow \int_a^{+\infty} f \text{ converge}\right) \text{ et } \left(\int_a^{+\infty} f \text{ diverge } \Longrightarrow \int_a^{+\infty} g \text{ diverge}\right).$$
3. Soit $c \in \mathbb{R}$. Pour $x \neq c$, on a par la relation de Chasles, $F_a(x) - F_a(c) = \int_c^x f(t)dt$. De plus, $f(c)(x-c) = \int_c^x f(c)dt$. Pour $x > c$, on a donc
$$|F_a(x) - F_a(c) - f(c)(x-c)| \;=\; \left|\int_c^x (f(t) - f(c))\, dt\right| \leq \int_c^x |f(t) - f(c)|\, dt\,.$$
Pour $x < c$, on a de même
$$|F_a(x) - F_a(c) - f(c)(x-c)| \;=\; \left|\int_c^x (f(t) - f(c))\, dt\right| \leq \int_x^c |f(t) - f(c)|\, dt\,.$$
Donc, pour $x \neq c$,
$$\left|\frac{F_a(x) - F_a(c)}{x-c} - f(c)\right| \;\leq\; \frac{1}{|x-c|}\left|\int_c^x |f(t) - f(c)|\, dt\right|. \tag{5}$$
Soit $\epsilon > 0$. Comme f est continue en c, il existe $\delta > 0$ tel que
$$|t-c| \,<\, \delta \Longrightarrow |f(t) - f(c)| \,<\, \epsilon\,. \tag{6}$$
Soit x vérifiant $|x-c| < \delta$. On a $|t-c| < \delta$ pour les t compris entre x et c donc, on déduit de (5) et de (6) que
$$\left|\frac{F_a(x) - F_a(c)}{x-c} - f(c)\right| \;\leq\; \frac{1}{|x-c|}\left|\int_c^x \epsilon\, dt\right| \;=\; \epsilon\,.$$
Cela montre que $F'(c)$ existe et vaut $f(c)$.

Exercice 2 :

1. Pour $x > 0$, $0 \leq t \mapsto e^{-xt^2}$ est continue. De plus, pour $t \geq 1$, $0 \leq e^{-xt^2} \leq e^{-xt}$ et
$$\int_1^T e^{-xt}\, dt \;=\; (-1/x)[e^{-xt}]_1^T \;=\; (1/x)(e^{-x} - e^{-xT}) \;\to\; (1/x)e^{-x}\,,$$
lorsque $T \to +\infty$. Donc $F(x)$ est convergente pour tout $x > 0$. Pour $t \geq 0$, $x \mapsto e^{-xt^2}$ est dérivable et sa dérivée $x \mapsto -t^2e^{-xt^2}$ est continue en t. De plus, pour $x \geq a$ et $t \geq 0$, on a
$$|-t^2e^{-xt^2}| \;\leq\; t^2e^{-at^2/2} \cdot e^{-at^2/2} \;\leq Ce^{-at^2/2}$$

car la fonction $t \mapsto t^2 e^{-at^2/2}$ est continue tendant vers 0 à l'infini donc bornée. En posant $g(t) = C$ si $t \in [0;1]$ et $g(t) = Ce^{-at/2}$ si $t \geq 1$, on a donc, pour tout $x > 0$ et tout $t \geq 0$, $|-t^2 e^{-xt^2}| \leq g(t)$. Comme

$$\int_1^T g(t)\,dt \;=\; C[(-2/a)e^{-at/2}]_1^T \;=\; (2C/a)(e^{a/2} - e^{-aT/2}) \;\to\; (2C/a)e^{a/2}\,,$$

lorsque $T \to +\infty$, g est intégrable sur $[0;+\infty[$. Par le théorème de dérivation, F est dérivable sur $[a;+\infty[$ et, pour $x \geq a$, $F'(x)$ est donnée par la formule (1).

2. Soit $x > 0$. Pour $T > 0$, on a

$$-\int_0^T t^2 e^{-xt^2}\,dt \;=\; \int_0^T t\frac{d}{dt}\Big(\frac{e^{-xt^2}}{2x}\Big)\,dt \;=\; \Big[t\frac{e^{-xt^2}}{2x}\Big]_0^T \;-\; \frac{1}{2x}\int_0^T e^{-xt^2}\,dt\,. \qquad (7)$$

   En passant à la limite quand $T \to +\infty$ dans (7), on obtient $F'(x) = (-1/(2x))F(x)$, car $Te^{-xT^2} \to 0$ puisque $x > 0$. On a donc montré (2).

3. Les solutions de l'équation linéaire du premier ordre (2) sont les $Kx^{-1/2}$, pour $K \in \mathbb{R}$. Par le 2., F est l'une d'elles donc il existe un $K \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x > 0$, $F(x) = Kx^{-1/2}$. Or $F(1) = \sqrt{\pi}/2$ donc $K = \sqrt{\pi}/2$.

Exercice 3 : Soit $f : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(t) = (7-2t)^{-1}$. Comme le dénominateur est strictement positif, f est bien définie et continue. Comme, pour tout n,

$$u_n \;=\; \sum_{k=0}^{n-1} f(k/n)\frac{1}{n}$$

$(u_n)_n$ est une somme de Riemann de f. Par le cours, $(u_n)_n$ converge vers l'intégrale de f sur $[0;1]$, c'est-à-dire :

$$\int_0^1 (7-2t)^{-1}\,dt \;=\; [-(1/2)\ln(7-2t)]_0^1 \;=\; (\ln 7 - \ln 5)/2 \;=\; (1/2)\ln(7/5)\,.$$

Pour tout $n > 0$, on a

$$|v_n \;-\; u_v| \;=\; \left|\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k}{n^4}\right| \;=\; \frac{n(n+1)}{2n^4} \;=\; \frac{1}{2n^2}(1+1/n) \;\to\; 0\,,$$

quand $n \to \infty$. Donc $(v_n)_n$ converge vers la limite de $(u_n)_n$.

Exercice 4 :

1. Pour $t \in [0;1/2]$, $f_1(t) = t$, pour $t \in [1/2;1]$, $f_1(t) = 1-t$. On prolonge f_1 par 1-périodicité sur $\mathbb{R}$. On a $\lim_{0^+} f_1 = 0$ et $\lim_{0^-} f_1 = \lim_{1^-} f_1 = 0$. Donc f_1 est continue en 0. De même elle est continue en 1/2 et en 1. Ailleurs elle est aussi continue. De plus, elle n'est pas constante.
   Pour $t \in [0;1/2]$, $f_2(t) = 1$, pour $t \in [1/2;1]$, $f_2(t) = 0$. On prolonge f_2 par 1-périodicité sur $\mathbb{R}$. f_2 est continue par morceaux mais pas continue en 1/2.

2. Comme f est continue, l'application $G : y \mapsto \int_0^y f(t)dt$ est dérivable de dérivée f, d'après le cours. Pour tout x, $F(x) = G(x+1) - G(x)$ donc F est dérivable par composition et, pour tout x, $F'(x) = G'(x+1) - G'(x) = f(x+1) - f(x) = 0$, par 1-périodicité.

3. Soit $x \in \mathbb{R}$. En notant par n la partie entière de x, $x = n + \delta$ avec $\delta \in [0;1[$. Soit $u \mapsto \varphi(u) = u - n$. φ est C^1 donc on a, par changement de variables (cf. (4)),

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_x^{x+1} f(t)\,dt = \int_{\varphi(x)}^{\varphi(x+1)} f(\varphi(u))\varphi'(u)\,du = \int_\delta^{\delta+1} f(u-n)\,du \\ &= \int_\delta^{\delta+1} f(u)\,du\,, \end{aligned}$$

d'après (3) avec $p = -n$. La fonction $v \mapsto \psi(v) = v - 1$ est aussi C^1 donc, par changement de variables (cf. (4)), on a

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_\delta^1 f(u)\,du + \int_1^{\delta+1} f(u)\,du = \int_\delta^1 f(u)\,du + \int_{\psi(1)}^{\psi(\delta+1)} f(\psi(v))\psi'(v)\,dv \\ &= \int_\delta^1 f(u)\,du + \int_0^\delta f(v-1)\,dv = \int_\delta^1 f(u)\,du + \int_0^\delta f(v)\,dv = F(0)\,, \end{aligned}$$

en utilisant (3) pour $p = -1$ et la relation de Chasles. On constate que F est constante donc dérivable de dérivée nulle.

Université de Cergy-Pontoise, Mathématiques L2 intégration.

Contrôle continu du 27 mars 2012 (1h 15 min.).

Les documents, téléphones, tablettes et calculettes sont interdits. Interrogation notée sur 20, le barème est indicatif. Dans un exercice, on pourra utiliser les résultats des questions précédentes même si celles-ci n'ont pas été traitées.

Exercice 1. : (5,5 pt). Questions de cours.

1. Soit U et V des ouverts de $\mathbb{R}^2$ et $F : U \longrightarrow V$ C^1 donnée par $F(x;y) = (u(x;y); v(x;y))$. Écrire la définition de la matrice jacobienne et du jacobien de F.
2. Donner sans justification le jacobien $J_F(r;\theta;\phi)$ au point $(r;\theta;\phi)$ du changement en coordonnées sphériques F donné par
$$F(r;\theta;\phi) \;=\; (r\cos\theta\cos\phi; r\sin\theta\cos\phi; r\sin\phi)$$
sur $[0;+\infty[\times[0;2\pi]\times[-\pi/2;\pi/2]$.
3. Compléter l'énoncé suivant pour en faire un énoncé correct du cours : Soit Ω un compact quarrable de $\mathbb{R}^2$. On note par $\mathcal{A}(\Omega)$ son aire. Pour ....., on note par $\mathcal{I}(f,\Omega)$ l'intégrale double de f sur Ω. On a
$$\left|\iint_\Omega f\right| \;\leq\; \cdots \;\leq\; \mathcal{A}(\Omega)\cdot\cdots .$$
Si .... $\mathcal{I}(f,\Omega) = 0$, alors $f = 0$.

Exercice 2. : (3 pts). Soit D le cercle de $\mathbb{R}^2$ de centre $(0;0)$ et de rayon 3. Soit C le cylindre défini par $\{(x;y;z)\in\mathbb{R}^3; x^2+y^2\leq 9 \text{ et } z\in[-3;4]\}$.

1. Montrer que l'aire A du disque D est 9π. *Indication* : on pourra effectuer un changement de variables en polaires.
2. Déterminer le volume V du cylindre C.

Exercice 3. : (9 pts). Soit $\Omega = \{(x;y;z)\in\mathbb{R}^3; x\in[1;2], y\in[-1/2;1/2], z\in[e;e^2]$ avec $1\leq x+y\leq 2$ et $1\leq x-y\leq 2\}$ et
$$I \;=\; \iiint_\Omega \big(z(x^2-y^2)+(x-y)^2\ln(x+y)\big)\cdot z\big(\ln z\big)^2\,dxdydz\,.$$
Soit $F : [1;2]^3 \longrightarrow \Omega$ donnée par
$$F(u;v;w) \;=\; \left(\frac{u+v}{2};\frac{u-v}{2};e^w\right).$$

1. Montrer que F est bien définie (c'est-à-dire à valeurs dans Ω). Montrer que F est bijective.
2. Montrer que F est C^1 et que son jacobien J_F vérifie $J_F(u; v; w) = -\frac{e^w}{2}$.
3. Montrer la bornitude de la fonction g donnée par

$$[1;2]^3 \ni (u; v; w) \ \mapsto \ \big(uve^w + v^2 \ln u\big) \cdot \frac{w^2 e^{2w}}{2} \in \mathbb{R} \,.$$

4. En déduire que I est l'intégrale triple de g sur le cube $[1;2]^3$.
5. Calculer explicitement I.

Exercice 4. : (3,5 pts). Soit $R \in]0;1[$ et $B_R = \{(x;y;z) \in \mathbb{R}^3 ; x^2+y^2+z^2 \leq R^2\}$ la boule de centre $(0;0;0)$ et de rayon R. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n \ = \ \iiint_{B_R} \big(x^2+y^2+z^2\big)^n \, dxdydz \quad \text{et}$$

$$J_n \ = \ \iiint_{B_R} \big(x^2 + y^2 + z^2\big)^n \cdot \big(xy + e^{xz} - y\mathrm{ch}z\big) \, dxdydz \,.$$

On rappelle que $\mathrm{ch}z = (e^z + e^{-z})/2$.

1. Montrer que, pour $a \in \mathbb{C}$ tel que $|a| < 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n} = 0$.
2. Pour tout n, exprimer I_n en fonction de n. Que peut-on dire de $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$?
3. En déduire que $\lim\limits_{n\to\infty} J_n$ existe et vaut 0.

Université de Cergy-Pontoise, Mathématiques L2 intégration.

Corrigé du contrôle continu du 27 mars 2012.

Exercice 1 :

1. La matrice jacobienne de F et son déterminant, le jacobien de F, sont :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x;y) & \frac{\partial u}{\partial y}(x;y) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x;y) & \frac{\partial v}{\partial y}(x;y) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x;y) & \frac{\partial u}{\partial y}(x;y) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x;y) & \frac{\partial v}{\partial y}(x;y) \end{vmatrix} = \Big(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}\Big)(x;y).$$

2. Le jacobien est $J_F(r;\theta;\phi) = r^2 \cos\phi$.
3. Pour $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{K}$ continue, on note par $\mathcal{I}(f,\Omega)$ l'intégrale double de f sur Ω. On a

$$\Big|\iint_\Omega f\Big| \;\leq\; \iint_\Omega |f| \;\leq\; \mathcal{A}(\Omega)\cdot \sup_{(x;y)\in\Omega} |f(x;y)|\,.$$

Si $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{K}$ continue et positive et si $\mathcal{I}(f,\Omega) = 0$, alors $f = 0$.

Exercice 2 :

1. Par définition, l'aire du disque est

$$\mathcal{A}(D) \;=\; \iint_D 1\,dxdy \;=\; \iint_{(r;\theta)\in[0;3]\times[0;2\pi]} r\,drd\theta\,,$$

par la formule de changement de variables en polaires, que l'on peut appliquer puisque la fonction constante 1 est continue et la fonction $1\times r$ est bornée sur $[0;3]\times[0;2\pi]$. Comme la fonction $(r;\theta)\mapsto r$ est continu et D est un rectangle, on peut appliquer la formule de Fubini et obtenir :

$$\mathcal{A}(D) \;=\; \int_0^3 \Big(\int_0^{2\pi} r\,d\theta\Big)\,dr \;=\; \int_0^3 2\pi r\,dr \;=\; \pi[r^2]_0^3 \;=\; 9\pi\,.$$

2. Par définition, le volume du cylindre est

$$\mathcal{V}(C) \;=\; \iiint_C 1\,dxdydz \;=\; \int_{-3}^4 \Big(\iint_D 1\,dxdy\Big)\,dz\,,$$

d'après la formule de Fubini partielle, que l'on peut appliquer car 1 est continue et car $\Omega = \{(x;y;z); z\in[-3;4]\,\text{et}\,(x;y)\in D_z\}$ avec $D_z = D$ pour tout z. D'après le 1., on obtient $\mathcal{V}(C) = 9\pi(4-(-3)) = 63\pi$.

Exercice 3 :

1. Pour $(u;v)\in[1;2]^2$, $1=2/2\le(u+v)/2\le 4/2=2$, $-1/2=(1-2)/2\le(u-v)/2\le(2-1)/2=1/2$, $(u+v)/2+(u-v)/2=u\in[1;2]$, $(u+v)/2-(u-v)/2=v\in[1;2]$. Comme l'exponentielle est croissante, on a, pour $w\in[1;2]$, $e^w\in[e^1;e^2]$. Donc F est bien définie.
Soit $G:\Omega\longrightarrow[1;2]^3$ définie par $G(x;y;z)=(x+y;x-y;\ln z)$. G est bien définie car, dans Ω, $x+y\in[1;2]$, $x-y\in[1;2]$ et, comme ln est définie et croissante sur $[e^1;e^2]$, $\ln z\in[\ln e;\ln e^2]=[1;2]$. Il suffit de montrer que $F\circ G=\mathrm{Id}_\Omega$ et $G\circ F=\mathrm{Id}_{[1;2]^3}$. Pour $(u;v;w)\in[1;2]^3$,
$$\begin{aligned}G\big(F(u;v;w)\big)&=G((u+v)/2;(u-v)/2;e^w)\\&=\big((u+v)/2+(u-v)/2;(u+v)/2-(u-v)/2;\ln e^w\big)\\&=(u;v;w)\,.\end{aligned}$$
Pour $(x;y;z)\in\Omega$,
$$\begin{aligned}F\big(G(x;y;z)\big)&=F(x+y;x-y;\ln z)\\&=\Big(\big((x+y)+(x-y)\big)/2;\big((x+y)-(x-y)\big)/2;e^{\ln z}\Big)\\&=(x;y;z)\,.\end{aligned}$$
2. Les dérivées partielles de F existent et sont des fonctions continues de $(u;v;w)$ comme composées de fonctions continues avec les projections continues $(u;v;w)\mapsto u$, $(u;v;w)\mapsto v$ et $(u;v;w)\mapsto w$. F est donc de classe C^1. De plus,
$$J_F(u;v;w)=\begin{vmatrix}1/2&1/2&0\\1/2&-1/2&0\\0&0&e^w\end{vmatrix}=-\frac{e^w}{2}\,,$$
en appliquant la règle de Sarrus.
3. Pour tout $(u;v;w)\in[1;2]^3$,
$$|g(u;v;w)|\le\frac{|uv|w^2}{2}e^{3w}+\frac{v^2w^2}{2}e^{2w}|\ln u|\le 8e^6+8e^4\ln 2\,.$$
4. Par 1. et 2., F est une bijection de $[1;2]^3$ sur Ω, de classe C^1 et dont le jacobien ne s'annule pas. En notant f la fonction à intégrer dans I, on a $f\circ F\cdot|J_F|=g$, la fonction bornée du 3. En effet, en remarquant que $x^2-y^2=(x+y)(x-y)$,
$$\big(f\circ F\cdot|J_F|\big)(u;v;w)=\Big(e^wuv+v^2\ln u\Big)\cdot e^ww^2\cdot\left|\frac{-e^w}{2}\right|=g(u;v;w)\,.$$

Par la formule de changement de variables, I est l'intégrale triple de g sur le cube $[1;2]^3$ soit, par linéarité,

$$I = \iiint_{[1;2]^3} \frac{uvw^2e^{3w}}{2}\, dudvdw + \iiint_{[1;2]^3} \frac{v^2w^2e^{2w}\ln u}{2}\, dudvdw\,.$$

Comme on intègre sur un cube une fonction continue, on peut appliquer aux deux intégrales la formule de Fubini totale pour obtenir $I = I_1 + I_2$ avec

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_1^2 \Big(\int_1^2 \Big(\int_1^2 \frac{uvw^2e^{3w}}{2}\, du \Big)\, dv \Big)\, dw \\
&= \frac{1}{2} \Big(\int_1^2 u\, du \Big) \Big(\int_1^2 v\, dv \Big) \Big(\int_1^2 w^2e^{3w}\, dw \Big) \\
&= \frac{1}{2} \Big(\int_1^2 u\, du \Big)^2 \Big(\int_1^2 w^2e^{3w}\, dw \Big)\,, \\
I_2 &= \int_1^2 \Big(\int_1^2 \Big(\int_1^2 \frac{v^2w^2e^{2w}\ln u}{2} du \Big)\, dv \Big)\, dw \\
&= \frac{1}{2} \Big(\int_1^2 \ln u\, du \Big) \Big(\int_1^2 v^2\, dv \Big) \Big(\int_1^2 w^2e^{2w}\, dw \Big)\,.
\end{aligned}$$

On calcule les intégrales simples restantes.

$$\int_1^2 u\, du = [u^2/2]_1^2 = 3/2\,, \int_1^2 v^2\, dv = [v^3/3]_1^2 = 7/3\,,$$

$$\int_1^2 \ln u\, du = [u\ln u - u]_1^2 = 2\ln 2 - 2 + 1 = 2\ln 2 - 1\,.$$

Enfin, pour $p \in \{2;3\}$, on a, par intégrations par parties,

$$\begin{aligned}
\int_1^2 w^2e^{pw}\, dw &= [w^2e^{pw}p^{-1}]_1^2 - 2p^{-1}\int_1^2 we^{pw}\, dw \\
&= (4e^{2p} - e^p)p^{-1} - 2p^{-1}[we^{pw}p^{-1}]_1^2 + 2p^{-2}\int_1^2 e^{pw}\, dw \\
&= (4e^{2p} - e^p)p^{-1} - 2p^{-2}(2e^{2p} - e^p) + 2p^{-3}(e^{2p} - e^p) \\
&= 2(2p^{-1} - 2p^{-2} + p^{-3})e^{2p} - (p^{-1} - 2p^{-2} + 2p^{-3})e^p\,.
\end{aligned}$$

Pour $p = 2$, elle vaut $(3e^2 - 1)e^2/4$. Pour $p = 3$, elle vaut $(26e^3 - 5)e^3/27$. D'où $I_1 = (26e^3 - 5)e^3/24$ et $I_2 = 7(2\ln 2 - 1)(3e^2 - 1)e^2/24$.

Exercice 4 :

1. Comme $|a| \leq 1$, on a, pour tout n, $|a^n/n| \leq |a|^n/n \leq 1/n$, qui tend vers 0 quand $n \to \infty$. Par le théorème des gendarmes, $\lim a^n/n = 0$.
   Autre argument : Comme $|a| < 1$, la suite géométrique (a^n) tend vers 0. Comme $\lim 1/n = 0$, $\lim a^n/n = 0$ par produit.
2. On note f_n la fonction à intégrer dans I_n. Elle est continue et, en notant par F le changement de variables en coordonnées sphériques et en posant $\Omega = [0; R] \times [0; 2\pi] \times [-\pi/2; \pi/2]$, la fonction g_n donnée par

$$\Omega \ni (r; \theta; \phi) \mapsto \big(f_n \circ F |J_F|\big)(r; \theta; \phi) \; = \; r^{2n+1} \cos\phi$$

   est continue et bornée. Par la formule de changement de variables en sphériques, I_n est l'intégrale triple de g_n sur Ω. Comme g_n est continue et Ω est un parallélépipède rectangle, on peut appliquer la formule de Fubini totale et obtenir

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^R \Big(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \Big(\int_0^{2\pi} r^{2n+1} \cos\phi \, d\theta \Big) \, d\phi \Big) \, dr \\ &= 2\pi \int_0^R r^{2n+1} \Big(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\phi \, d\phi \Big) \, dr \\ &= 2\pi [\sin\phi]_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^R r^{2n+1} \, dr \; = \; 4\pi \Big[\frac{r^{2n+2}}{2n+2} \Big]_0^R \; = \; \frac{4\pi R^{2n+2}}{2n+2} \, . \end{aligned}$$

   Pour tout $n > 0$,

$$I_n \; = \; \frac{4\pi R^2 n}{2n+2} \cdot \frac{R^{2n}}{n} \; = \; \frac{2\pi R^2}{1 + 1/n} \cdot \frac{(R^2)^n}{n} \, .$$

   Le premier facteur tend vers $2\pi R^2$ et, comme $0 \leq R^2 < 1$, le second terme tend vers 0, par le 1. Donc $\lim I_n$ existe et vaut 0.
   Autre argument : (I_n) est 4π fois une sous-suite de la suite $((R^2)^n/n)$. Comme $0 \leq R^2 < 1$, cette dernière converge vers 0 par 1. La sous-suite converge donc aussi vers 0. D'où $\lim I_n$ existe et vaut 0.
3. Sur B_R, $|xy + e^{xz} - y\text{ch}z| \leq |xy| + e^{xz} + |y|\text{ch}z \leq R^2 + e^{(R^2)} + 2Re^R = C_R$. Par le cours,

$$|J_n| \; \leq \; \iiint_{B_R} \big(x^2 \, + \, y^2 \, + \, z^2\big)^n \cdot \big|xy \, + \, e^{xz} \, - \, y\text{ch}z\big| \, dxdydz \; \leq \; C_R I_n$$

   et comme $I_n \to 0$, (J_n) tend vers 0 par le théorème des gendarmes.
   Autre argument : On peut aussi remarquer que $|J_n| \leq (R^2)^n C_R \mathcal{V}(B_R)$, que le majorant est une suite géométrique qui tend vers 0 puisque $0 \leq R^2 < 1$ et terminer avec le théorème des gendarmes.