Université de Cergy-Pontoise, Mathématiques L2 intégration.

Examen 2ième session, 14 juin 2012 (2h.).

Les documents, téléphones, tablettes et calculettes sont interdits.

On rappelle que, sauf mention contraire explicite, toute réponse devra être justifiée. Des réponses correctes mal justifiées peuvent certes rapporter des points mais pas le maximum. Dans un exercice, on pourra utiliser les résultats des questions précédentes même si celles-ci n'ont pas été traitées. Le barème est indicatif.

Début de l'épreuve.

Exercice 1. : (5 pt). Questions de cours.

1. Soit $\gamma : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ qui à $t \in [0;1]$ associe $\gamma(t) = (x(t); y(t))$. On suppose γ est une courbe paramétrée de classe C^1. Soit $\omega = Pdx + Qdy$ une forme différentielle de classe C^0 à valeurs réelles. Donner la définition de l'intégrale curviligne de ω le long de γ.
2. Donner sans justification le jacobien $J_F(r;\theta;\phi)$ au point $(r;\theta;\phi)$ du changement en coordonnées sphériques F donné par
$$F(r;\theta;\phi) \;=\; (r\cos\theta\cos\phi; r\sin\theta\cos\phi; r\sin\phi)$$
sur $[0;+\infty[\times[0;2\pi]\times[-\pi/2;\pi/2]$.
3. Compléter l'énoncé suivant pour en faire un énoncé correct du cours : Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On a, pour $a > 1$,
$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} \text{ converge } \iff \cdots .$$
4. Compléter l'énoncé suivant pour en faire un énoncé correct du cours : Soit $a < b$ dans $\mathbb{R}$. Soit $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R} \cdots$. On a
$$\Big|\int_a^b f\Big| \;\le\; \int_a^b \cdots \;\le\; (b-a)\cdots .$$

Exercice 2. : (4 pts). Pour $z \in \mathbb{R}$, on note par D_z le disque du plan de centre $(0;0)$ et de rayon $1+z^2$. Soit $C = \{(x;y;z) \in \mathbb{R}^3; z \in [-1;1], (x;y) \in D_z\}$ et V son volume.

1. Expliquer pourquoi on a la formule
$$V \;=\; \int_{-1}^{1} \Big(\iint_{D_z} dxdy\Big)\, dz\,. \tag{1}$$
2. Calculer V.

Exercice 3. : (5 pts). Soit $\Omega = \{(x;y \in \mathbb{R}^2; x \in [1;2], y \in [-1/2;1/2] \,\text{avec}\, 1 \leq x+y \leq 2 \,\text{et}\, 1 \leq x-y \leq 2\}$ et

$$I \;=\; \iint_\Omega \left(e^{x^2-y^2}(x-y) + (x-y)^3 \ln(1+x+y)\right) dxdy\,.$$

Soit $F : [1;2]^2 \longrightarrow \Omega$ donnée par

$$F(u;v) \;=\; \left(\frac{u+v}{2};\frac{u-v}{2}\right).$$

1. Montrer que F est bien définie (c'est-à-dire à valeurs dans Ω). Montrer que F est bijective.
2. Montrer que F est C^1 et que son jacobien J_F vérifie $J_F(u;v) = -\frac{1}{2}$.
3. Montrer la bornitude de la fonction g donnée par

$$[1;2]^2 \ni (u;v) \;\mapsto\; ve^{uv} + v^3\ln(1+u) \in \mathbb{R}\,.$$

4. Calculer explicitement I.

Exercice 4. : (7 pts). Pour $x \geq 0$ et $x > 0$ respectivement, on pose

$$F(x) \;=\; \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,dt \quad \text{et} \quad G(x) \;=\; \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}}\,dt\,.$$

On rappelle que $\operatorname{Arctan} 0 = 0$, $\lim\limits_{+\infty} \operatorname{Arctan} = \pi/2$ et que

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt \;=\; \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,. \tag{2}$$

1. Montrer que, pour $x \geq 0$, F est bien définie. Que vaut $F(0)$?
2. Montrer que, pour $x > 0$, G est bien définie.
3. Montrer que F tend vers 0 en $+\infty$.
4. Montrer que F est de classe C^1 sur $]0;+\infty[$ et donner une expression de sa dérivée.
5. Calculer explicitement G.

Exercice 5. : (2 pts). Soit $\gamma : [0;2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$ donné par $\gamma(t) = e^{it}$. Justifier l'existence de J, l'intégrale curviligne le long de γ de la forme différentielle à valeurs complexes

$$\omega \;=\; \frac{1}{1-\frac{z}{2}}\,dz\,,$$

et donner sa valeur.

Fin de l'épreuve.

Exercice 1 : 5 pts au total.
1. **1,5 pts**. Par définition,

$$\int_\gamma \omega \;=\; \int_0^1 \Big(P\big(x(t); y(t)\big) x'(t) \;+\; Q\big(x(t); y(t)\big) y'(t) \Big)\, dt\,.$$

2. **1 pts**. On a $J_F(r;\theta;\phi) = r^2 \cos\phi$.
3. **1 pts**. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On a, pour $a > 1$,

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} \text{ converge } \iff \alpha \;>\; 1\,.$$

4. **1,5 pts**. Soit $a < b$ dans $\mathbb{R}$. Soit $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux. On a

$$\Big|\int_a^b f\Big| \;\leq\; \int_a^b |f| \;\leq\; (b-a) \cdot \sup_{x\in[a;b]} |f(x)|\,.$$

Exercice 2 : 3,5 pts au total.
1. **1,5 pts**. Par définition, V est l'intégrale triple de la fonction constante égale à 1 sur C. Comme cette dernière est continue et compte tenu de la forme de C, on peut appliquer le théorème de Fubini partiel qui donne (1).
2. **2 pts**. Pour $z \in [-1;1]$, soit $R_z = [0; 1+z^2] \times [0; 2\pi]$. Comme la fonction 1 est continue et comme $R_z \ni (r;\theta) \mapsto r$ est bornée, on a par changement de variables en polaires,

$$\iint_{D_z} dxdy \;=\; \iint_{R_z} r\, drd\theta\,.$$

Comme $R_z \ni (r;\theta) \mapsto r$ est continue et R_z est un rectangle, on a, par Fubini,

$$\iint_{R_z} r\, drd\theta \;=\; \int_0^{1+z^2} r\Big(\int_0^{2\pi} d\theta\Big)\, dr \;=\; 2\pi \int_0^{1+z^2} r\, dr \;=\; \pi(1+z^2)^2\,.$$

Donc, par 1.,

$$V \;=\; \int_{-1}^1 \pi(1+z^2)^2\, dz \;=\; \pi\Big[z \;+\; \frac{2}{3}z^3 \;+\; \frac{1}{5}z^5\Big]_{-1}^1 \;=\; \pi\Big(2 + \frac{4}{3} + \frac{2}{5}\Big) \;=\; \frac{56\pi}{15}\,.$$

On retire 0,5 pt si Fubini n'est pas cité. On retire 0,5 pt si le changement de variables en polaires n'est pas cité.

Exercice 3 : 7 pts au total.
1. **1,5 pts**. Pour $(u;v) \in [1;2]^2$, $1 = 2/2 \leq (u+v)/2 \leq 4/2 = 2$, $-1/2 = (1-2)/2 \leq (u-v)/2 \leq (2-1)/2 = 1/2$, $(u+v)/2 + (u-v)/2 = u \in [1;2]$, $(u+v)/2 - (u-v)/2 = v \in [1;2]$. Donc F est bien définie. (**0,5 pt**)

Soit $G : \Omega \longrightarrow [1;2]^2$ définie par $G(x;y) = (x+y; x-y)$. G est bien définie car, dans Ω, $x+y \in [1;2]$ et $x-y \in [1;2]$. Il suffit de montrer que $F \circ G = \mathrm{Id}_\Omega$ et $G \circ F = \mathrm{Id}_{[1;2]^2}$. Pour $(u;v) \in [1;2]^2$,

$$\begin{aligned} G\big(F(u;v)\big) &= G((u+v)/2; (u-v)/2) \\ &= \big((u+v)/2 + (u-v)/2; (u+v)/2 - (u-v)/2\big) \\ &= (u;v)\,. \end{aligned}$$

Pour $(x;y) \in \Omega$,

$$\begin{aligned} F\big(G(x;y)\big) &= F(x+y; x-y) \\ &= \Big(\big((x+y)+(x-y)\big)/2; \big((x+y)-(x-y)\big)/2\Big) \\ &= (x;y)\,. \end{aligned}$$

2. **1,5 pts**. Les dérivées partielles de F existent et sont continues comme composées de fonctions continues avec les projections continues $(u;v) \mapsto u$ et $(u;v) \mapsto v$. F est donc de classe C^1. De plus,

$$J_F(u;v) \;=\; \begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{vmatrix} \;=\; -\frac{1}{2}\,.$$

0,5 pt pour la classe C^1.
3. **0,5 pt**. Pour tout $(u;v) \in [1;2]^2$,

$$|g(u;v)| \;=\; g(u;v) \;\leq\; 2e^4 \;+\; 2^3 \ln(3)\,.$$

4. **3,5 pts** : Par 1. et 2., F est une bijection de $[1;2]^2$ sur Ω, de classe C^1 et dont le jacobien ne s'annule pas. En notant f la fonction continue à intégrer dans I, on a $f \circ F \cdot |J_F| = g$, la fonction bornée du 3. En effet, en remarquant que $x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$,

$$\big(f \circ F \cdot |J_F|\big)(u;v) \;=\; \big(e^{uv} v^{-1} + v^3 \ln(1+u)\big)\left|\frac{-1}{2}\right| \;=\; g(u;v)\,.$$

Par la formule de changement de variables, I est l'intégrale double de g sur le carré $[1;2]^2$ soit, par linéarité,

$$I \;=\; \iint_{[1;2]^2} \frac{ve^{uv}}{2}\, dudv \;+\; \iint_{[1;2]^2} \frac{v^3 \ln(1+u)}{2}\, dudv\,.$$

Comme on intègre sur un carré une fonction continue, on peut appliquer aux deux intégrales la formule de Fubini pour obtenir $I = I_1 + I_2$ avec

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_1^2 \Big(\int_1^2 \frac{ve^{uv}}{2}\, du\Big)\, dv \;=\; \frac{1}{2}\Big(\int_1^2 \big[e^{uv}\big]_1^2\, dv\Big) \\ &= \frac{1}{2}\Big(\int_1^2 e^{2v}\, dv \;-\; \int_1^2 e^v\, dv\Big) \;=\; \frac{1}{2}\Big(\Big[\frac{e^{2v}}{2}\Big]_1^2 \;-\; \big[e^v\big]_1^2\Big) \;=\; \frac{e^4 - 3e^2 + 2e}{4}\,, \\ I_2 &= \int_1^2 \Big(\int_1^2 \frac{v^3 \ln(1+u)}{2} du\Big)\, dv \;=\; \frac{1}{2}\Big(\int_1^2 \ln(1+u)\, du\Big)\Big(\int_1^2 v^3\, dv\Big) \\ &= \frac{1}{2}\Big[\frac{v^4}{4}\Big]_1^2 \cdot \big[(1+u)\ln(1+u) - (1+u)\big]_1^2 \;=\; \frac{15}{8}\big(3\ln 3 \;-\; 2\ln 2 \;-\; 1\big)\,. \end{aligned}$$

1,5 pts pour le changement de variables, 1 pt pour Fubini, 1 pt pour le calcul final.

Exercice 4 : 7,5 pts au total.
1. **1,5 pt**. Soit $x \geq 0$. La fonction de t à intégrer est continue. Pour tout $t \geq 0$,

$$0 \;\leq\; \frac{e^{-xt}}{1+t^2} \;\leq\; \frac{1}{1+t^2}\,. \tag{3}$$

Comme $t^2(1+t^2)^{-1}$ tend vers 1 quand $t \to +\infty$ et comme $\int_1^{+\infty} dt/t^2$ est une intégrale de Riemann convergente, $F(x)$ est convergente. Comme

$$\int_0^T \frac{1}{1+t^2}\,dt \;=\; \big[\mathrm{Arctan}\,t\big]_0^T \;=\; \mathrm{Arctan}\,T \to \pi/2\,,$$

quand $T \to +\infty$, $F(0) = \pi/2$. **0,5 pt** pour $F(0)$.
2. **1,5 pts**. Soit $x > 0$. La fonction de t à intégrer est continue et positive sur $]0;+\infty[$. Pour $0 < t \leq 1$,

$$0 \;\leq\; \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}} \;\leq\; \frac{1}{t^{1/2}}\,.$$

et l'intégrale $\int_0^1 dt/t^{1/2}$ est une intégrale de Riemann convergente, donc $G(x)$ est convergente en 0. Pour $1 \leq t$,

$$0 \;\leq\; \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}} \;\leq\; e^{-xt}\,.$$

Comme

$$\int_1^T e^{-xt}\,dt \;=\; \left[\frac{e^{-xt}}{-x}\right]_1^T \;=\; \frac{1}{x}\big(1 - e^{-xT}\big) \;\to\; 0\,,$$

quand $T \to +\infty$ car $x > 0$, $t \mapsto e^{-xt}$ est convergente à l'infini et il en est de même de $G(x)$ par comparaison. Donc $G(x)$ est bien définie.
3. **1,5 pts**. D'après (3), la fonction à intégrer est dominée par une fonction intégrable qui ne dépend pas de x. De plus, pour $t > 0$,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} \;=\; 0\,.$$

Donc, par un corollaire du théorème de convergence dominée, la limite de F en $+\infty$ existe et vaut l'intégrale de 0 à $+\infty$ de la fonction nulle, c'est-à-dire 0.
4. **1,5 pts**. Pour $t \geq 0$ et $x \geq 0$, la dérivée partielle par rapport à x de l'intégrande est bien définie et donnée par la fonction continue en $(x;t)$

$$g(x;t) \;=\; \frac{-te^{-xt}}{1+t^2} \;\leq\; 0\,.$$

Soit $a > 0$. Pour $x \geq a$ et tout $t \geq 0$, $|g(x;t)| \leq te^{-at}$. La fonction continue et positive $t \mapsto te^{-at}$ est intégrable à l'infini car $t^2 \cdot te^{-at}$ tend vers 0 en $+\infty$ et $\int_1^{+\infty} dt/t^2$ converge. La dérivée partielle de l'intégrande étant dominée par une fonction intégrable qui ne dépend pas de x et F étant bien définie, on a, par le cours, sur $[a;+\infty[$, la dérivabilité de F, la continuité de F' et la formule

$$F'(x) \;=\; \int_0^{+\infty} g(x;t)\,dt\,. \tag{4}$$

Comme a est arbitraire, F est C^1 sur $]0;+\infty[$ et la formule (4) y est valable.
5. **1,5 pts**. Soit $x>0$. Soit $T>\epsilon>0$. Par changement de variables ($t=u/x$),

$$\int_\epsilon^T \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}}\,dt \;=\; \int_\epsilon^{Tx} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u/x}}\,\frac{du}{x} \;=\; \frac{1}{\sqrt{x}}\int_{\epsilon x}^{Tx} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\,du\,.$$

Par changement de variables ($u=v^2$),

$$\int_\epsilon^T \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}}\,dt \;=\; \frac{1}{\sqrt{x}}\int_{\sqrt{\epsilon x}}^{\sqrt{Tx}} \frac{e^{-v^2}}{v}\,2v\,dv \;=\; \frac{2}{\sqrt{x}}\int_{\sqrt{\epsilon x}}^{\sqrt{Tx}} e^{-v^2}\,dv\,.$$

Comme l'intégrale sur $[0;+\infty[$ de e^{-v^2} converge, on obtient, en prenant successivement les limites $T\to+\infty$ puis $\epsilon\to 0$,

$$G(x) \;=\; \frac{2}{\sqrt{x}}\int_0^{+\infty} e^{-v^2}\,dv \;=\; \frac{2}{\sqrt{x}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2} \;=\; \sqrt{\frac{\pi}{x}}\,.$$

Remarque : on peut procéder autrement.
Pour $t>0$ et $x>0$, la dérivée partielle par rapport à x de l'intégrande est bien définie et donnée par la fonction continue en $(x;t)$

$$h(x;t) \;=\; \frac{-te^{-xt}}{\sqrt{t}} \;=\; -\sqrt{t}e^{-xt}\,.$$

Elle se prolonge par continuité en $t=0$. Soit $a>0$. Pour $x\ge a$ et tout $t>0$, $|g(x;t)|\le \sqrt{t}e^{-at}$. La fonction continue et positive $t\mapsto\sqrt{t}e^{-at}$ est intégrable à l'infini car $t^2\cdot\sqrt{t}e^{-at}$ tend vers 0 en $+\infty$ et $\int_1^{+\infty} dt/t^2$ converge. La dérivée partielle de l'intégrande étant dominée par une fonction intégrable qui le dépend pas de x et G étant bien définie, on a, par le cours, sur $[a;+\infty[$, la dérivabilité de G et la formule

$$G'(x) \;=\; \int_0^{+\infty} h(x;t)\,dt\,. \tag{5}$$

Comme $a>0$ est arbitraire, G est dérivable sur $]0;+\infty[$ et la formule (5) y est valable.
Soit $x>0$. Soit $T>\epsilon>0$. Par intégration par parties,

$$\int_\epsilon^T h(x;t)\,dt \;=\; \Big[\sqrt{t}\cdot\frac{e^{-xt}}{x}\Big]_\epsilon^T - \int_\epsilon^T \frac{e^{-xt}}{2x\sqrt{t}}\,dt \;=\; \frac{1}{x}\big[\sqrt{t}\cdot e^{-xt}\big]_\epsilon^T - \frac{1}{2x}\int_\epsilon^T \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}}\,dt\,.$$

En prenant les limites $T\to+\infty$ puis $\epsilon\to 0$, on obtient $G'(x)=0-G(x)/(2x)$. G est donc solution d'une équation différentielle linéaire sans second membre donc il existe $K\in\mathbb{R}$ tel que

$$\forall x>0\,,\; G(x) \;=\; Ke^{-(1/2)\ln x} \;=\; \frac{K}{\sqrt{x}}\,.$$

On voit que $K = G(1)$. On peut calculer $G(1)$ comme on a calculé $G(x)$ plus haut.

Exercice 5 : 2 pts au total.
Soit $U = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 4/3\}$. Pour $z \in U$, $|z/2| < 1$ et $1 - z/2 \neq 0$. Donc la fonction $f(z) = (1 - z/2)^{-1}$ est continue sur U. Il en est de même pour la forme différentielle $\omega = f(z)dz$. Comme γ est une courbe paramétrée C^1 incluse dans l'ouvert U, l'intégrale J est bien définie. **0,5 pt**.
Or, pour $|z| < 2$, on a $|z/2| < 1$ et

$$f(z) \; = \; \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\frac{z}{2}\Big)^n . \tag{6}$$

Cette série entière a donc un rayon de convergence ≥ 2. Elle converge donc uniformément sur U. En particulier, la série de fonctions

$$\sum_{n \geq 0} \gamma'(t) \Big(\frac{\gamma(t)}{2}\Big)^n$$

converge uniformément sur $[0; 2\pi]$ vers $\gamma' f \circ \gamma$. D'après un résultat du cours sur les intégrales simples, la série suivante converge et

$$J \; = \; \int_0^{2\pi} \Big(\sum_{n=0}^{\infty} \gamma'(t) \Big(\frac{\gamma(t)}{2}\Big)^n\Big)\, dt \; = \; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \int_0^{2\pi} \gamma(t)^n \gamma'(t)\, dt \; = \; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \Big[\frac{\gamma(t)^{n+1}}{n+1}\Big]_0^{2\pi} \; = \; 0 .$$

Remarque : On peut aller un peu plus vite. Après avoir établi (6), on peut appliquer directement un résultat du cours sur les intégrales curvilignes de séries de Laurent. Comme γ est fermée et comme la série ne contient pas de terme en $1/z$, l'intégrale J est nulle.

Total des points : 25.