Université de Cergy-Pontoise, Mathématiques L2 intégration.

Examen (3h.).

Information générale.

Les documents, téléphones, tablettes et calculettes sont interdits.

L'examen comporte deux exercices sur 4 et 5 points respectivement et un problème sur 39 points, soit un total de 48 points, dont 8 points hors barème, pour une note sur 20. Ce barème est indicatif.

On rappelle que, sauf mention contraire explicite, toute réponse devra être justifiée. Des réponses correctes mal justifiées peuvent certes rapporter des points mais pas le maximum.

Dans un exercice, on pourra utiliser les résultats des questions précédentes même si celles-ci n'ont pas été traitées. Dans le problème, toute question peut être traitée en premier. Son traitement nécessite éventuellement les résultats de questions précédentes mais pas la preuve de ses résultats. Certaines questions du problème sont indépendantes des autres parties voire même des autres questions.

Dans le problème, les questions ou parties commençant par "(*)" sont considérées comme difficiles. Les questions commençant par "(**)" sont considérées comme très difficiles. Toujours dans le problème, un paragraphe intitulé "Rappels" fournit des définitions et des résultats que l'on peut utiliser sans redémonstration.

Début de l'épreuve.

Exercice 1. : (4 pts). Pour $z \geq 0$, on note par D_z le disque du plan de centre $(0;0)$ et de rayon z. Soit $C = \{(x;y;z) \in \mathbb{R}^3; z \in [1;3], (x;y) \in D_z\}$.

1. Donner **sans justification** le jacobien $J_F(r;\theta)$ du changement de variables en coordonnées polaires donné par $F(r;\theta) = (r\cos\theta; r\sin\theta)$ pour $r \in \mathbb{R}^+$ et $\theta \in [0;2\pi]$.
2. Montrer que le volume V de C vérifie
$$V \ = \ \int_1^3 \Big(\iint_{D_z} dxdy \Big) \, dz \, . \tag{1}$$
3. Calculer V.

Exercice 2. : (5 pts). Soit $\Omega = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2; x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 1\}$. Soit $\gamma : [0;3] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la courbe paramétrée C^1 par morceaux définie par $\gamma(t) = (x(t);y(t))$ avec

$$\begin{array}{rclcrclcl} x(t) & = & t & \text{et} & y(t) & = & 0 & \text{si} & t \in [0;1] \, , \\ x(t) & = & 2-t & \text{et} & y(t) & = & t-1 & \text{si} & t \in [1;2] \, , \\ x(t) & = & 0 & \text{et} & y(t) & = & 3-t & \text{si} & t \in [2;3] \, . \end{array}$$

Soit $\omega = Pdx + Qdy$ une forme différentielle C^1 sur $\mathbb{R}^2$ donnée par $P(x;y) = e^y$ et $Q(x;y) = x^2 y$.

1. Calculer l'intégrale double $K = \iint_\Omega \left(2xy \,-\, e^y\right) dxdy$.
2. Donner la définition de $L = \int_\gamma \omega$.
3. Calculer L. *Indication :* on pourra utiliser la formule de Green-Riemann.

Problème.

L'objectif du problème est de montrer que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F(x) \;=\; \int_{-1}^{1} e^{itx} \cos(t\pi/2)\, dt \tag{2}$$

est intégrable sur $\mathbb{R}$ et que son intégrale vaut $2\pi\cos(0 \times \pi/2) = 2\pi$.

Rappels : On pourra utiliser sans démonstration les faits suivants.
Pour tout nombre complexe a, la fonction $\varphi_a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par $\varphi_a(t) = e^{at}$ est dérivable et, pour tout t, $\varphi_a'(t) = ae^{at}$.
Une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite paire si, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = f(x)$. Une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite impaire si, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = -f(x)$.
On note par Arctan la bijection réciproque de la fonction tangente $\tan :]-\pi/2; \pi/2[\longrightarrow \mathbb{R}$.
Arctan est impaire, strictement positive sur $]0; +\infty[$ et vérifie $\lim\limits_{+\infty} \mathrm{Arctan} = \pi/2$.

Partie I. : Étude de la fonction F. (10 pts).

1. **Majorations de la fonction F.**
   a. Vérifier que F est bien définie par (2) et que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|F(x)| \leq 2$.
   b. Montrer que, pour $x > 0$,
   $$|F(x)| \;\leq\; \frac{\pi}{x^2}\left(1 + \frac{\pi}{2}\right). \tag{3}$$
   Indication : on pourra effectuer deux intégrations par parties puis majorer.
   c. En déduire la convergence absolue de
   $$\int_1^{+\infty} F(x)\, dx\,. \tag{4}$$
2. Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que F est paire, c'est-à-dire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(-x) = F(x)$.
   Indication : on pourra effectuer un changement de variables.
4. En déduire que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\, dx$ converge absolument.

Partie II. : Fonctions particulières. (8 pts).
Pour $\lambda > 0$, on considère la fonction positive et paire $g_\lambda : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$g_\lambda(t) \ = \ \frac{\lambda}{2\mathrm{Arctan}\,\lambda} \cdot \frac{1}{1+t^2\lambda^2} \geq 0\,. \tag{5}$$

1. Montrer la convergence de
$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+y^2}\,dy\,. \tag{6}$$

2. Soit $\lambda > 0$. Vérifier que $\displaystyle\int_{-1}^{1} g_\lambda(t)\,dt = 1$.

3. Soit $c \in]0;1[$.
   a. Pour $\lambda > 0$, vérifier que
$$\int_{-1}^{-c} g_\lambda(t)\,dt \ = \ \int_c^1 g_\lambda(t)\,dt\,. \tag{7}$$

   b. (*) Montrer que
$$\lim_{\lambda\to+\infty} \int_{-1}^{-c} g_\lambda(t)\,dt \ = \ 0 \ = \ \lim_{\lambda\to+\infty} \int_c^1 g_\lambda(t)\,dt\,. \tag{8}$$

4. (**) Montrer que
$$\lim_{\lambda\to+\infty} \int_{-1}^{1} \cos(t\pi/2)\,g_\lambda(t)\,dt \ = \ \cos(0\times\pi/2) \ = \ 1\,. \tag{9}$$

   Indication : on pourra utiliser la continuité en 0 de $t \mapsto \cos(t\pi/2)$.

Partie III. : (*) Calcul de l'intégrale sur $\mathbb{R}$ de F. (17 pts).

1. Soit $\lambda > 0$ et $t \in [-1;1]$.
   a. Montrer la convergence absolue de
$$I_\lambda(t) \ = \ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{|x|}{\lambda}}\,e^{itx}\,dx\,. \tag{10}$$

   b. Vérifier toutes les égalités suivantes :
$$I_\lambda(t) \ = \ \frac{1}{(1/\lambda)+it} + \frac{1}{(1/\lambda)-it} \ = \ \frac{2\lambda}{1+t^2\lambda^2} \ = \ (4\mathrm{Arctan}\,\lambda)\,g_\lambda(t)\,. \tag{11}$$

   Indication : on pourra utiliser un calcul explicite de $\displaystyle\int_0^X e^{-\frac{|x|}{\lambda}}\,e^{itx}\,dx$, pour $X > 0$.

2. a. Soit $\lambda > 0$. Montrer la convergence absolue de

$$J_\lambda \;=\; \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{|x|}{\lambda}}\, F(x)\, dx\,. \tag{12}$$

b. Montrer que $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} J_\lambda = \int_{\mathbb{R}} F$.

3. Soit $\lambda > 0$. On va établir l'expression suivante de J_λ :

$$J_\lambda \;=\; (4\mathrm{Arctan}\,\lambda) \int_{-1}^{1} \cos(t\pi/2)\, g_\lambda(t)\, dt\,. \tag{13}$$

a. Expliquer pourquoi

$$J_\lambda \;=\; \lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} e^{-\frac{|x|}{\lambda}}\, F(x)\, dx\,. \tag{14}$$

b. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$\int_{-n}^{n} e^{-\frac{|x|}{\lambda}}\, F(x)\, dx \;=\; \int_{-1}^{1} \cos(t\pi/2) \Big(\int_{-n}^{n} e^{-\frac{|x|}{\lambda}}\, e^{itx}\, dx\Big)\, dt\,. \tag{15}$$

c. (*) Trouver une constante $C_\lambda > 0$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in [-1;1]$,

$$\Big|\int_{-\infty}^{-n} e^{-\frac{|x|}{\lambda}}\, e^{itx}\, dx\Big| + \Big|\int_{n}^{+\infty} e^{-\frac{|x|}{\lambda}}\, e^{itx}\, dx\Big| \;\le\; C_\lambda e^{-\frac{n}{2\lambda}}\,. \tag{16}$$

d. (*) En déduire l'égalité (13).

4. Montrer que $\int_{\mathbb{R}} F = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\, dx = 2\pi$.

Partie IV. : Application. (4 pts).

1. Pour x réel différent de $-\pi/2$ et de $\pi/2$, donner une expression explicite de $F(x)$ en fonction de x.
   Indication : on pourra remplacer le cosinus dans (2) par 1/2 fois la somme de fonctions exponentielles complexes.
2. Montrer la convergence de l'intégrale

$$I \;=\; \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-\pi\cos x}{x^2 \,-\, (\pi^2/4)}\, dx\,. \tag{17}$$

3. Montrer que $I = 2\pi$.

Fin de l'épreuve.

Université de Cergy-Pontoise, Mathématiques L2 intégration.
Corrigé de l'examen du 15 mai 2012.

Exercice 1 :
1. Le jacobien est $J_F(r;\theta) = r$.
2. Comme la fonction constante égale à 1 est continue et grâce à la forme de C, on peut appliquer la formule de Fubini partielle qui donne exactement (1).
3. Soit $z \in [1;3]$ et $R_z = [0;z] \times [0;2\pi]$. Comme la fonction constante égale à 1 est continue et comme $R_z \ni (r;\theta) \mapsto r$ est bornée, on a par changement de variables en polaires,

$$\iint_{D_z} dxdy \;=\; \iint_{R_z} r\,drd\theta\,.$$

Comme $R_z \ni (r;\theta) \mapsto r$ est continue et R_z est un rectangle, on a, par Fubini,

$$\iint_{R_z} r\,drd\theta \;=\; \int_0^z r\Big(\int_0^{2\pi} d\theta\Big)\,dr \;=\; 2\pi\int_0^z r\,dr \;=\; \pi z^2\,.$$

Donc, par 2.,

$$V \;=\; \int_1^3 \pi z^2\,dz \;=\; \frac{\pi}{3}\big(3^3 - 1^3\big) \;=\; \frac{26\pi}{3}\,.$$

Exercice 2 :
1. Comme Ω est un triangle et comme $(x;y) \mapsto 2xy - e^y$ est continue (comme somme, produit et composée de fonctions continues) sur Ω, on a, par Fubini,

$$\begin{aligned} K \;&=\; \int_0^1 \Big(\int_0^{1-x} (2xy - e^y)\,dy\Big)\,dx \;=\; \int_0^1 \big(x(1-x)^2 - e^{1-x} + 1\big)\,dx \\ &=\; \int_0^1 \big(x^3 - 2x^2 + x + 1 - e^{1-x}\big)\,dx \;=\; \frac{1}{4} - \frac{2}{3} + \frac{1}{2} + 1 + e[e^{-x}]_0^1 \;=\; \frac{25}{12} - e\,. \end{aligned}$$

2. Par définition,

$$L \;=\; \int_0^3 \big(e^{y(t)}x'(t) \;+\; x(t)^2 y(t) y'(t)\big)\,dt\,.$$

3. Comme γ est le bord orienté du triangle Ω et qu'il est sans point double, comme ω est C^1, on a, par la formule de Green-Riemann,

$$L \;=\; \iint_\Omega \Big(\frac{\partial Q}{\partial x}(x;y) \;-\; \frac{\partial P}{\partial y}(x;y)\Big)\,dxdy \;=\; \iint_\Omega \big(2xy \;-\; e^y\big)\,dxdy \;=\; K\,.$$

Problème :
I :
1.a. À x fixé, $t \mapsto e^{itx}\cos(t\pi/2)$ est continue donc F est bien définie comme intégrale de Riemann. De plus, par le cours, pour tout x,

$$|F(x)| \;\le\; \int_{-1}^1 \big|e^{itx}\cos(t\pi/2)\big|\,dt \;\le\; \int_{-1}^1 1\,dt \;=\; 2\,.$$

1.b. Pour $x > 0$, on a, par intégrations par parties,

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int_{-1}^{1} \cos(t\pi/2)\Big(\frac{d}{dt}\frac{e^{itx}}{ix}\Big)\,dt \\
&= \Big[\frac{e^{itx}}{ix}\cos(t\pi/2)\Big]_{-1}^{1} \;-\; \frac{1}{ix}\int_{-1}^{1} e^{itx}\big(-\sin(t\pi/2)\big)\frac{\pi}{2}\,dt \\
&= 0 \;+\; \frac{\pi}{2ix}\Big\{\Big[\frac{e^{itx}}{ix}\sin(t\pi/2)\Big]_{-1}^{1} \;-\; \frac{1}{ix}\int_{-1}^{1} e^{itx}\cos(t\pi/2)\frac{\pi}{2}\,dt\Big\} \\
&= \frac{-\pi}{2x^2}(e^{it}+e^{-it}) \;+\; \frac{\pi^2}{4x^2}F(x)\,.
\end{aligned}$$

Donc, en utilisant 1.a.,

$$|F(x)| \;\le\; \frac{\pi}{x^2} \;+\; \frac{\pi^2}{2x^2} \;=\; \frac{\pi}{x^2}\Big(1+\frac{\pi}{2}\Big)\,.$$

1.c. La fonction positive $|F|$ est majorée sur $[1;+\infty[$ par C/x^2 qui est intégrable à l'infini donc, par le cours, $|F|$ est intégrale sur $[1;+\infty[$.
2. Comme composées de fonctions continues avec les fonctions continues $(x;t) \mapsto x$ et $(x;t) \mapsto t$, $(x;t) \mapsto e^{itx}\cos(t\pi/2)$ est continue. Donc, par le théorème de continuité pour les intégrales dépendant d'un paramètre, F est continue.
3. Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $\varphi(t) = -t$, qui est C^1. Par la formule de changement de variables, comme $\varphi'(t) = -1$ et cos est paire,

$$\begin{aligned}
F(-x) &= \int_{-1}^{1} e^{-i\varphi(t)(-x)}\cos(-\varphi(t)\pi/2)(-\varphi'(t))\,dt \\
&= -\int_{-(-1)}^{-1} e^{-iu(-x)}\cos(-u\pi/2)\,du \;=\; -\int_{1}^{-1} e^{iux}\cos(u\pi/2)\,du \\
&= \int_{-1}^{1} e^{iux}\cos(u\pi/2)\,du \;=\; F(x)\,.
\end{aligned}$$

4. $|F|$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc intégrable sur tout segment de $\mathbb{R}$. En particulier, sur $[-1;1]$. Pour $X > 1$, on a, par changement de variables et parité de F,

$$\int_{-X}^{-1} |F(x)|\,dx \;=\; -\int_{-X}^{-1} |F(x)|\,(-x)'dx \;=\; -\int_{X}^{1} |F(-u)|\,du \;=\; \int_{1}^{X} |F(u)|\,du$$

qui a une limite finie quand $X \to +\infty$ par 1.c. Donc F est absolument intégrable sur $]-\infty;-1[$. Comme elle l'est sur $[1;+\infty[$ par 1.c., elle l'est sur $\mathbb{R}$.
II :
1. La fonction $[0;+\infty[\mapsto (1+y^2)^{-1}$ est continue et positive. Comme $\lim\limits_{y\to+\infty} y^2(1+y^2)^{-1} = 1$ et comme y^{-2} est intégrable à l'infini, on a la convergence de (6) par le cours.
2. Soit $\lambda > 0$. En posant $\varphi(t) = t\lambda$ qui est C^1, on a, par changement de variables,

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} g_\lambda(t)\,dt &= \frac{1}{2\mathrm{Arctan}\,\lambda}\int_{-1}^{1}\frac{\varphi'(t)}{1+\varphi(t)^2}\,dt \;=\; \frac{1}{2\mathrm{Arctan}\,\lambda}\int_{-\lambda}^{\lambda}\frac{du}{1+u^2} \\
&= \frac{1}{2\mathrm{Arctan}\,\lambda}\big(\mathrm{Arctan}\,\lambda - (\mathrm{Arctan}\,(-\lambda)\big) \;=\; 1\,.
\end{aligned}$$

3.a. Soit $\lambda > 0$. Par changement de variables et parité de g_λ,

$$\int_{-1}^{-c} g_\lambda(t)\,dt \;=\; -\int_{-1}^{-c} g_\lambda(-(-t))\,(-t)'dt \;=\; -\int_{1}^{c} g_\lambda(-u)\,du \;=\; \int_{c}^{1} g_\lambda(u)\,du\,.$$

3.b. D'après 3.a., il suffit de montrer que la dernière limite dans (8) est nulle. Pour $\lambda > 0$ fixé, g_λ est décroissante et positive donc, pour tout $t \in [c;1]$, $0 \le g_\lambda(t) \le g_\lambda(c)$. Donc, pour tout $\lambda > 0$, par le cours,

$$0 \;\le\; \int_c^1 g_\lambda(t)\,dt \;\le \int_c^1 g_\lambda(c)\,dt \;=\; \frac{\lambda}{2\mathrm{Arctan}\,\lambda(1+c^2\lambda^2)} \;=\; \frac{1}{\lambda}\cdot\frac{1}{2\mathrm{Arctan}\,\lambda}(c^2+1/\lambda^2)\,.$$

Quand $\lambda \to +\infty$, la majorant tend vers 0 (puisque $\mathrm{Arctan}\,\lambda \to \pi/2$). Donc, par le théorème des gendarmes,

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_c^1 g_\lambda(t)\,dt \quad \text{existe et vaut} \quad 0\,.$$

4. D'après 2., en utilisant le cours et le fait que g_λ est positive, on a, pour $\lambda > 0$,

$$\begin{aligned}
\Big|\int_{-1}^{1}\cos(t\pi/2)\,g_\lambda(t)\,dt \;-\;1\Big| \;&=\; \Big|\int_{-1}^{1}\big(\cos(t\pi/2)\;-\;1\big)\cdot g_\lambda(t)\,dt\Big| \\
&\le\; \int_{-1}^{1}\big|\cos(t\pi/2)\;-\;1\big|\cdot|g_\lambda(t)|\,dt \\
&\le\; \int_{-1}^{1}\big|\cos(t\pi/2)\;-\;1\big|\cdot g_\lambda(t)\,dt \qquad (18)
\end{aligned}$$

Soit $\epsilon > 0$. Comme $t \mapsto \cos(t\pi/2)$ est continue en 0, il existe $\delta > 0$ tel que

$$|t| \;<\; \delta \implies \big|\cos(t\pi/2)\;-\;1\big| \;<\; \frac{\epsilon}{2}\,. \qquad (19)$$

Soit $c = \min(\delta; 1/2) \in]0;1[$. Pour ce c, on a (8). Donc il existe $\lambda_0 > 0$ tel que

$$\lambda > \lambda_0 \implies 0 \;\le\; \int_{-1}^{-c} g_\lambda(t)\,dt + \int_c^1 g_\lambda(t)\,dt \;<\; \frac{\epsilon}{4}\,. \qquad (20)$$

Pour $\lambda > \lambda_0$, on a (18) et en écrivant

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1}\big|\cos(t\pi/2)\;-\;1\big|\cdot g_\lambda(t)\,dt \;&=\; \int_{-1}^{-c}\big|\cos(t\pi/2)\;-\;1\big|\cdot g_\lambda(t)\,dt + \int_{-c}^{c}\big|\cos(t\pi/2)\;-\;1\big|\cdot g_\lambda(t)\,dt \\
&\quad + \int_{c}^{1}\big|\cos(t\pi/2)\;-\;1\big|\cdot g_\lambda(t)\,dt \\
&\le\; 2\int_{-1}^{-c} g_\lambda(t)\,dt \,+\, 2\int_c^1 g_\lambda(t)\,dt \,+\, \int_{-c}^{c}\big|\cos(t\pi/2)\;-\;1\big|\cdot g_\lambda(t)\,dt\,,
\end{aligned}$$

on en déduit, par (20) et (19),

$$\Big|\int_{-1}^{1}\cos(t\pi/2)\,g_\lambda(t)\,dt \;-\;1\Big| \;<\; 2\frac{\epsilon}{4} + \int_{-c}^{c}\frac{\epsilon}{2}g_\lambda(t)\,dt \;\le\; \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2}\int_{-1}^{1} g_\lambda(t)\,dt \;=\; \epsilon\,,$$

en utilisant encore que g_λ est positive et 2. On a montré (9) par la définition.
III :
1.a. On a, pour tout x, $|e^{-\frac{|x|}{\lambda}}\, e^{itx}| = e^{-\frac{|x|}{\lambda}} = e^{-\frac{|-x|}{\lambda}}$. Pour $X > 0$,

$$\int_{-X}^{0} e^{-\frac{|x|}{\lambda}}\, dx \;=\; -\int_{-X}^{0} e^{-\frac{|x|}{\lambda}}\, (-x)' dx \;=\; -\int_{X}^{0} e^{-\frac{|-u|}{\lambda}}\, du \;=\; \int_{0}^{X} e^{-\frac{|u|}{\lambda}}\, du \;=\; \left[-\lambda e^{-\frac{u}{\lambda}}\right]_0^X ,$$

qui tend vers λ quand $X \to +\infty$. Donc $t \mapsto |e^{-\frac{|x|}{\lambda}}\, e^{itx}|$ est intégrable en $-\infty$ et en $+\infty$ et donc $I_\lambda(t)$ est absolument convergente.
1.b. Soit $X > 0$. On a

$$\int_{0}^{X} e^{-\frac{|x|}{\lambda}}\, e^{itx}\, dx \;=\; \int_{0}^{X} e^{(it-\frac{1}{\lambda})x}\, dx \;=\; \left[\frac{e^{(it-\frac{1}{\lambda})x}}{it-1/\lambda}\right]_0^X \;=\; \frac{1}{it-1/\lambda}\left(e^{(it-\frac{1}{\lambda})X} - 1\right) .$$

Comme $\lambda > 0$, $|e^{(it-\frac{1}{\lambda})X}| = e^{-X/\lambda} \to 0$, quand $X \to +\infty$. Donc

$$\int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{|x|}{\lambda}}\, e^{itx}\, dx \;=\; \frac{1}{-it+1/\lambda} .$$

De même, pour $X > 0$,

$$\int_{-X}^{0} e^{-\frac{|x|}{\lambda}}\, e^{itx}\, dx \;=\; \int_{-X}^{0} e^{(it+\frac{1}{\lambda})x}\, dx \;=\; \left[\frac{e^{(it+\frac{1}{\lambda})x}}{it+1/\lambda}\right]_{-X}^0 \;=\; \frac{1}{it+1/\lambda}\left(-e^{-(it+\frac{1}{\lambda})X} + 1\right)$$

avec $|e^{(it+\frac{1}{\lambda})X}| = e^{-X/\lambda} \to 0$, quand $X \to +\infty$. Donc

$$\int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{|x|}{\lambda}}\, e^{itx}\, dx \;=\; \frac{1}{it+1/\lambda} ,$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} I_\lambda(t) &= \frac{1}{-it+1/\lambda} + \frac{1}{it+1/\lambda} = \frac{2/\lambda}{t^2+1/\lambda^2} = \frac{2\lambda}{1+t^2\lambda^2} \\ &= \frac{4\operatorname{Arctan}\lambda}{2\operatorname{Arctan}\lambda}\cdot\frac{1}{1+t^2\lambda^2} = \left(4\operatorname{Arctan}\lambda\right)\cdot g_\lambda(t) . \end{aligned}$$

2.a. Soit $\lambda > 0$. Pour tout x, $0 \le |e^{-\frac{|x|}{\lambda}} F(x)| \le |F(x)|$. Comme F est absolument intégrable sur $\mathbb{R}$ d'après I.1.4., il en est de même de J_λ.
Remarque : on peut aussi dire la chose suivante. Soit $\lambda > 0$. Pour tout x, $0 \le |e^{-\frac{|x|}{\lambda}} F(x)| \le e^{-\frac{|x|}{\lambda}}$. Le majorant est intégrable puisque $I_\lambda(t)$ est absolument intégrable (cf. 1.a.) donc J_λ est absolument intégrable.
2.b. On vient de voir que $x \mapsto |e^{-\frac{|x|}{\lambda}} F(x)|$ est dominée par une fonction intégrable indépendante de λ (c'est $|F|$). De plus, pour chaque $x \ge 0$,

$$\lim_{\lambda\to+\infty} e^{-\frac{|x|}{\lambda}} F(x) \;=\; F(x) .$$

Donc, par un corollaire du théorème de convergence dominée, $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} J_\lambda$ existe et vaut $\int_{\mathbb{R}} F$.
3.a. Comme J_λ converge absolument, elle converge. Donc les limites

$$\lim_{X\to+\infty}\int_{-X}^{0} e^{-\frac{|x|}{\lambda}} F(x) \quad \text{et} \quad \lim_{X\to+\infty}\int_{0}^{X} e^{-\frac{|x|}{\lambda}} F(x)$$

existent, sont finies et leur somme est J_λ. Comme $\lim n = +\infty$, on a, par composition,

$$\lim_n \int_{-n}^{0} e^{-\frac{|x|}{\lambda}} F(x)\,dx = \lim_{X\to+\infty}\int_{-X}^{0} e^{-\frac{|x|}{\lambda}} F(x)\,dx \quad \text{et}$$

$$\lim_n \int_{0}^{n} e^{-\frac{|x|}{\lambda}} F(x)\,dx = \lim_{X\to+\infty}\int_{0}^{X} e^{-\frac{|x|}{\lambda}} F(x)\,dx\,,$$

donc on a la formule (14).
3.b. Comme composées de fonctions continues avec les fonctions continues $(x;t)\mapsto x$ et $(x;t)\mapsto t$, $(x;t)\mapsto e^{itx}\cos(t\pi/2)e^{-|x|/\lambda}$ est continue. Par le théorème de Fubini appliqué deux fois sur le rectangle $R_n = [-n;n]\times[-1;1]$, on a

$$\begin{aligned}\int_{-n}^{n} e^{-\frac{|x|}{\lambda}}\Big(\int_{-1}^{1} e^{itx}\cos(t\pi/2)\,dt\Big)\,dx &= \iint_{R_n} e^{itx}\cos(t\pi/2)e^{-|x|/\lambda}\,dxdt \\ &= \int_{-1}^{1}\cos(t\pi/2)\Big(\int_{-n}^{n} e^{-\frac{|x|}{\lambda}}\,e^{itx}\,dx\Big)\,dt\,,\end{aligned}$$

ce qui donne (15) d'après (2).
3.c. Comme, pour tout $X > n$,

$$\Big|\int_{n}^{X} e^{-\frac{|x|}{\lambda}}\,e^{itx}\,dx\Big| \leq \int_{n}^{X}\big|e^{-\frac{|x|}{\lambda}}\,e^{itx}\big|\,dx\,,$$

$$\Big|\int_{n}^{+\infty} e^{-\frac{|x|}{\lambda}}\,e^{itx}\,dx\Big| \leq \int_{n}^{+\infty}\big|e^{-\frac{|x|}{\lambda}}\,e^{itx}\big|\,dx\,,$$

par passage à la limite dans les inégalités. En particulier,

$$\Big|\int_{n}^{+\infty} e^{-\frac{|x|}{\lambda}}\,e^{itx}\,dx\Big| \leq \int_{n}^{+\infty} e^{-\frac{|x|}{2\lambda}}e^{-\frac{n}{2\lambda}}\,dx$$

car, pour $x \geq n$, $|x|/(2\lambda) \geq n/(2\lambda)$ et $e^{-\frac{|x|}{2\lambda}} \leq e^{-\frac{n}{2\lambda}}$. De même,

$$\Big|\int_{-\infty}^{-n} e^{-\frac{|x|}{\lambda}}\,e^{itx}\,dx\Big| \leq \int_{-\infty}^{-n} e^{-\frac{|x|}{2\lambda}}e^{-\frac{n}{2\lambda}}\,dx\,,$$

ce qui donne (16) avec

$$C_\lambda = \int_{-\infty}^{-n} e^{-\frac{|x|}{2\lambda}}\,dx + \int_{n}^{+\infty} e^{-\frac{|x|}{2\lambda}}\,dx\,.$$

Remarque : On peut aussi calculer explicitement

$$\int_n^{+\infty} \left|e^{-\frac{|x|}{\lambda}}\, e^{itx}\right| dx \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{-n} \left|e^{-\frac{|x|}{\lambda}}\, e^{itx}\right| dx$$

et montrer que la somme est inférieure à $C'_\lambda e^{-\frac{n}{\lambda}}$, qui est à son tour $\leq C'_\lambda e^{-\frac{n}{2\lambda}}$.
3.d. D'après (10) et (11), on a

$$(4\mathrm{Arctan}\,\lambda) \int_{-1}^{1} \cos(t\pi/2)\, g_\lambda(t)\, dt \;=\; \int_{-1}^{1} \cos(t\pi/2)\, I_\lambda(t)\, dt\,. \tag{21}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $t \in [-1;1]$,

$$I_\lambda(t) \;=\; \int_{-\infty}^{-n} e^{-\frac{|x|}{\lambda}}\, e^{itx}\, dx + \int_{-n}^{n} e^{-\frac{|x|}{\lambda}}\, e^{itx}\, dx + \int_{n}^{+\infty} e^{-\frac{|x|}{\lambda}}\, e^{itx}\, dx\,, \tag{22}$$

les trois fonctions étant continues par rapport à t. En effet, pour celle du milieu, on utilise le théorème de continuité d'une intégrale dépendant d'un paramètre car $(x;t) \mapsto e^{-\frac{|x|}{\lambda}} e^{itx}$ est continue. Pour les deux autres, on utilise la continuité à x fixé de $t \mapsto e^{-\frac{|x|}{\lambda}} e^{itx}$ et la domination, pour tout $(x;t)$, $|e^{-\frac{|x|}{\lambda}} e^{itx}| \leq e^{-\frac{|x|}{\lambda}}$, qui est intégrable, pour appliquer un corollaire du théorème de convergence dominée. Le fait que ces trois fonctions sont continues nous permet d'écrire

$$\int_{-1}^{1} \cos(t\pi/2)\, I_\lambda(t)\, dt \;=\; \int_{-1}^{1} \cos(t\pi/2) \left(\int_{-\infty}^{-n} e^{-\frac{|x|}{\lambda}}\, e^{itx}\, dx\right) dt \tag{23}$$

$$+ \int_{-1}^{1} \cos(t\pi/2) \left(\int_{-n}^{n} e^{-\frac{|x|}{\lambda}}\, e^{itx}\, dx\right) dt \tag{24}$$

$$+ \int_{-1}^{1} \cos(t\pi/2) \left(\int_{n}^{+\infty} e^{-\frac{|x|}{\lambda}}\, e^{itx}\, dx\right) dt\,. \tag{25}$$

Les terme de droite de (23) et le terme (25) sont majorés en valeur absolue par

$$\int_{-1}^{1} |\cos(t\pi/2)| \left|\int_{-\infty}^{-n} e^{-\frac{|x|}{\lambda}}\, e^{itx}\, dx\right| dt + \int_{-1}^{1} |\cos(t\pi/2)| \left|\int_{n}^{+\infty} e^{-\frac{|x|}{\lambda}}\, e^{itx}\, dx\right| dt$$

qui, par (16), est lui-même inférieur ou égal à

$$\int_{-1}^{1} C_\lambda e^{-\frac{n}{2\lambda}}\, dt \;=\; 2C_\lambda e^{-\frac{n}{2\lambda}}\,.$$

Comme ce dernier terme tend vers 0 quand $n \to \infty$, il en est de même, par le théorème des gendarmes, du terme de droite de (23) et du terme (25). D'après (15) puis (14), le terme (24) tend vers J_λ quand $n \to \infty$. Conclusion, en passant à la limite $n \to \infty$ dans l'égalité (23), on obtient d'après (21) la formule (13).
4. D'après 2.b., on sait que $\int_{\mathbb{R}} F$ est la limite J_λ en $+\infty$. Par la formule (13), la propriété (9) et le fait qu'Arctan tende vers $\pi/2$ en $+\infty$, on en déduit que $\int_{\mathbb{R}} F = 4(\pi/2)\cdot 1 = 2\pi$.

IV :
1. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-\pi/2; \pi/2\}$. D'après (2),

$$F(x) \;=\; \int_{-1}^{1} e^{itx} \cdot \frac{e^{it\pi/2} + e^{-it\pi/2}}{2}\, dt \;=\; \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{it(x+\pi/2)}\, dt \;+\; \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{it(x-\pi/2)}\, dt\,.$$

Comme x est différent de $-\pi/2$ et de $\pi/2$, on a

$$\begin{aligned} F(x) \;&=\; \frac{1}{2}\left[\frac{e^{it(x+\pi/2)}}{i(x+\pi/2)}\right]_{-1}^{1} + \frac{1}{2}\left[\frac{e^{it(x-\pi/2)}}{i(x-\pi/2)}\right]_{-1}^{1} \;=\; \frac{2i\sin(x+\pi/2)}{2i(x+\pi/2)} + \frac{2i\sin(x-\pi/2)}{2i(x-\pi/2)} \\ &=\; \cos x \cdot \left(\frac{1}{x+\pi/2} - \frac{1}{x-\pi/2}\right) \;=\; \frac{-\pi\cos x}{x^2-\pi^2/4}\,. \end{aligned}$$

2. La fonction à intégrer est continue par morceaux et est intégrable sur $\mathbb{R}$ puisque, d'après 1., elle coïncide sur $\mathbb{R} \setminus \{-\pi/2; \pi/2\}$ avec F, qui est continue et intégrable sur $\mathbb{R}$ d'après I.2. et I.4.
Remarque : On peut aussi montrer la convergence de I de la manière suivante. La fonction f à intégrer est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{-\pi/2; \pi/2\}$. En utilisant la dérivabilité de cos en $-\pi/2$ (resp. $\pi/2$), on montre que f admet une limite finie en $-\pi/2$ (resp. $\pi/2$). Elle est donc continue par morceaux. Pour $|x| \geq \pi$, $x^2/2 - (\pi^2/4 > 0$ et

$$|f(x)| \;\leq\; \frac{\pi}{x^2/2 + x^2/2 - (\pi^2/4)} \;\leq\; \frac{\pi}{x^2/2} \;=\; \frac{2\pi}{x^2}\,.$$

La fonction positive $|f|$ est dominée par une fonction intégrable donc I converge absolument et donc converge.
3. D'après 2., I est égale à l'intégrale sur $\mathbb{R}$ de F qui vaut 2π d'après III.4.