Université de Cergy-Pontoise **2008-2009**
S4 MI/M/MP/MP-ENSI/PC-ENSI

Voici une brève correction des deux contrôles continus.

Contrôle continu d'Intégration
Sujet 1
Corrigé

Question de cours (4pts)

Dans le cours il a été énoncer le résultat suivant :

Proposition 0.1 *Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit f une fonction de deux variables à valeurs réelles définies sur $J \times I$, verifiant*
•$\forall t \in I$, $x \longmapsto f(x,t)$ est continue sur J.
•$\forall x \in J$, $t \longmapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur tout segment de I.
• il existe une fonction h définie sur I, continue par morceaux sur tout segment de I, telle que

$$-\forall (x,t) \in J \times I, |f(x,t)| \leq h(t),$$

$$-\int_a^b h(t)dt \text{ est une intégrale convergente.}$$

Alors la fonction définie par

$$F(x) = \int_a^b f(x,t)dt,$$

est continue sur J.

Exercice 1(11pts)

On souhaite étudier la fonction définie pour $x \in]0, \frac{1}{2}]$ par

$$F(x) = \int_0^1 \frac{-1+2x+s(2-3x)}{1-\big(-1+2x+s(2-3x)\big)^2}(2-3x)ds.$$

1)(2pts) On pose $f(x,s) = \dfrac{-1+2x+s(2-3x)}{1-\big(-1+2x+s(2-3x)\big)^2}(2-3x)$.

a) Pour tout $x \in [0, \frac{1}{2}]$, $2-3x \geq \frac{1}{2} > 0$ donc $\varphi : s \mapsto -1+2x+s(2-3x)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Si $s \in]0,1[$, on a donc $\varphi(0) < \varphi(s) < \varphi(1)$. Donc pour tout $s \in]0,1[$ et $x \in [0, \frac{1}{2}]$,

$$-1+2x < -1+2x+s(2-3x) < 1-x.$$

b) Pour tout $x \in [0, \frac{1}{2}]$, $0 \geq -1+2x \geq -1$ et $0 \leq 1-x \leq 1$. Donc par la question précédente, pour tout $s \in]0,1[$ et $x \in [0, \frac{1}{2}]$, $|-1+2x+s(2-3x)| < 1$, et donc $1-\big(-1+2x+s(2-3x)\big)^2 \neq 0$. Donc f est définie sur $[0, \frac{1}{2}] \times]0,1[$.

c) Montrer que pour tout $x \in]0, \frac{1}{2}]$, dans les calculs précédents on a pour tout $s \in]0,1[$ et $x \in [0, \frac{1}{2}]$, $|-1+2x+s(2-3x)| < 1-x$ et donc pour tout $s \in [0,1]$ et $x \in [0, \frac{1}{2}]$, $|-1+2x+s(2-3x)| < 1$, $F(x)$ est une intégrale classique.

Pour $x = 0$, on $f(0,s) = \dfrac{2(-1+2s)}{1-\big(-1+2s\big)^2} = \dfrac{-1+2s}{2s-2s^2}$ qui n'est pas définie pour $s = 0$, c'est bien une intégrale généralisée.

2)(2pts) Par les théorèmes généraux, la fonction $(x,s) \mapsto f(x,s)$ est C^1 sur $]0, \frac{1}{2}] \times [0,1]$. En utilisant les résultats des intégrales classiques dépendant d'un paramètre, on a bien que F est une fonction de classe C^1 sur $]0, \frac{1}{2}]$.

3)(2pts) L'intégrale $F(0) = \displaystyle\int_0^1 \frac{-1+2s}{2s-2s^2} ds$ est généralisée en 0. Or au voisinage de 0, $\dfrac{-1+2s}{2s-2s^2} \sim \dfrac{-1}{2s}$. On sait que $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{s} ds$ diverge donc $F(0)$ est une intégrale divergente.

4)(5pts) On se propose de calculer explicitement F pour montrer qu'elle admet une limite quand x tend vers 0.

a) Pour $x \in]0, \frac{1}{2}]$ fixé, on pose $t = -1+2x+s(2-3x)$. On obtient alors immédiatement que pour tout $x \in]0, \frac{1}{2}]$,

$$F(x) = \int_{-1+2x}^{1-x} \frac{t}{1-t^2} dt.$$

b) Une primitive de $t \mapsto \dfrac{t}{1-t^2}$ est $t \mapsto \dfrac{-1}{2} \ln(1-t^2)$. Donc pour tout $x \in]0, \frac{1}{2}]$, en utilisant les propriétés du logarithme

$$F(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1-(-1+2x)^2}{1-(1-x)^2}\right) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{4x-4x^2}{2x-x^2}\right)$$

c) Au voisinage de 0, $\dfrac{4x-4x^2}{2x-x^2} \sim \dfrac{4x}{2x} = 2$. Donc en passant à la limite,

$$\lim_{x \to 0^+} \int_{-1+2x}^{1-x} \frac{t}{1-t^2} dt = \frac{\ln(2)}{2}.$$

d) Si l'intégrale suivante $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{t}{1-t^2} dt$ était convergente, par imparité de la fonction $t \mapsto \dfrac{t}{1-t^2}$, elle devrait valoir 0. mais elle devrait aussi valoir $\dfrac{\ln(2)}{2}$ par la question précédente. C'est une intégrale divergente.

On pouvait aussi revenir à la définition. L'intégrale est généralisée en 1 et -1. On étudie d'abord la convergence de $\displaystyle\int_0^1 \frac{t}{1-t^2}dt$. Pour tout $\varepsilon > 0$ on a

$$I_\varepsilon = \int_0^{1-\varepsilon} \frac{t}{1-t^2}dt = \left[\frac{-1}{2}\ln(1-t^2)\right]_0^{1-\varepsilon} = \frac{-1}{2}\ln(2\varepsilon - \varepsilon^2),$$

On constate que $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} I_\varepsilon = +\infty$ donc l'intégrale diverge.

Exercice 2

Partie I : (5pts)

1)(2pts) Dans le cours il est énoncé :

Proposition 0.2 Somme de Riemann
Soit f une fonction continue par morceaux sur I. Pour tout $n > 0$ fixé, on choisit n points $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ tels que $\dfrac{(i-1)(b-a)}{n} \leq x_i - a \leq \dfrac{i(b-a)}{n}$ et on pose

$$S_n = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i).$$

Alors la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite qui converge vers $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$.

2)(3pts) Pour tout n fixé, on se donne une famille $(y_k)_{0\leq k\leq n-1}$ telle que $y_k \in]\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}[$. On pose alors :

$$U_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n(1+y_k)}.$$

a) D'après le rappel précédent (U_n) est une somme de Riemann associée à la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ sur le segment $[0,1]$. On peut aussi considérer que c'est la somme de Riemann associée à la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $[1,2]$.

b) On vient dénoncer que (U_n) convergeait vers $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x}dx = \ln(2)$ (ou $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x}dx$).

Partie II : Questions subsidiaires
On souhaite étudier la suite définie par :

$$\forall n \geq 1, \quad S_n = \sum_{k=n}^{2n-1} \sin\left(\frac{1}{k}\right).$$

On rappelle que pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$,

$$x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x.$$

1) Pour tout $1 \leq n$ et pour tout $0 \leq k \leq n-1$, les réels $\dfrac{1}{n+k} \in [0,1]$ donc d'après la remarque

$$\frac{1}{n+k} - \frac{1}{6(n+k)^3} \leq \sin\left(\frac{1}{n+k}\right) \leq \frac{1}{n+k}.$$

Or $\dfrac{1}{n+k} - \dfrac{1}{6(n+k)^3} - \dfrac{1}{n+k+1} = \dfrac{1}{(n+k)(n+k+1)} - \dfrac{1}{6(n+k)^3}$. On montre facilement que $(n+k)(n+k+1) \leq 6(n+k)^3$ ce qui permet de conclure que $\dfrac{1}{n+k} - \dfrac{1}{6(n+k)^3} \geq \dfrac{1}{n+k+1}$ et d'obtenir l'encadrement souhaité.

2) Puisque que la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ est continue sur $[0,+\infty[$, par le théorème de la valeur intermédiaire on en déduit que pour tout $1 \leq n$ fixé, pour tout $0 \leq k \leq n-1$, il existe $y_k \in]\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}[$ tel que

$$n \sin\left(\frac{1}{n+k}\right) = \frac{1}{1+y_k}.$$

(On pouvait aussi utiliser que $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ décroissante et continue).

3) On retrouve que (S_n) est égale à une somme de Riemann du type (U_n) étudiée dans la partie I. On en déduit immédiatement que (S_n) converge vers $\ln(2)$.

Contrôle continu d'Intégration

Sujet 2

Corrigé

Exercice 1(11pts)

Soit le domaine Ω de $\mathbb{R}^2$, tel que $(u, v) \in \Omega$ si et seulement si

$$u, v \in [e^{-2}; e^2]$$
$$\sqrt{uv}, \sqrt{\frac{u}{v}} \in [e^{-1}, e]$$

On souhaite calculer l'intégrale double suivante

$$I = \iint_\Omega (u + v)\ dudv.$$

1) Dans le cours la formule de changement de variables donnée est la suivante :

Théorème 0.1 *(***Formule de changement de variables***)*
Soit Ω un ensemble fermé, borné, quarrable du plan. Soit F une fonction définie de Ω dans Ω_1 bijective et de classe C^1. On suppose que pour tout $(x, y) \in \Omega$ $J_F(x, y) \neq 0$. On vérifie alors

$$\iint_\Omega f\big(F(x, y)\big)\big|J_F(x, y)\big|dxdy = \iint_{\Omega_1} f(u, v)dudv.$$

2) On définit la fonction suivante :

$$\begin{array}{llll} F: & [-1, 1]^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x, y) & \longmapsto & (e^{x+y}, e^{x-y}). \end{array}$$

a)Soit, $(x, y) \in [-1, 1]^2$ alors on a $x + y$ et $x - y$ dans $[-2, 2]$, on a bien par croissance de la fonction exponentielle e^{x+y} et e^{x-y} éléments de $[e^{-2}; e^2]$. De plus on remarque que $\sqrt{e^{x+y}.e^{x-y}} = e^x$ et $\sqrt{e^{x+y}/e^{x-y}} = e^y$, on en déduit bien que F est à valeurs dans Ω.
Si $F(x, y) = F(x', y')$, alors on a immédiatement $e^{x+y}.e^{x-y} = e^{x'+y'}.e^{x'-y'}$ et donc par injectivité de l'exponentielle, $x = x'$ et donc $y = y'$. F est bien injective.
b)Soit $(u, v) \in \Omega$, on essaie de résoudre $F(x, y) = (u, v)$. On montre facilement que si (x, y) est solution alors $e^{2x} = u.v \in [e^{-2}; e^2]$ et $e^{2y} = \frac{u}{v} \in [e^{-2}; e^2]$. On pose donc $x = \frac{1}{2}(\ln(u.v)) \in [-1, 1]$ et $y = \frac{1}{2}(\ln(u) - \ln(v)) \in [-1, 1]$ qui donne bien un couple solution. F est donc surjective sur Ω.
c) Le calcul des dérivées partielles nous donne

$$J_F(x, y) = \begin{vmatrix} e^{x+y} & e^{x+y} \\ e^{x-y} & -e^{x-y} \end{vmatrix} = -2e^{2x}.$$

3)En appliquant la formule de changement de variables à F, on obtient

$$\begin{aligned}
I &= \iint_{[-1,1]^2} (e^{x+y} + e^{x-y})| - 2e^{2x}|dxdy \\
&= 4\iint_{[-1,1]^2} e^{3x}\frac{e^y + e^{-y}}{2}dxdy \\
&= 4\iint_{[-1,1]^2} e^{3x}\mathrm{ch}(y)dxdy.
\end{aligned}$$

On se retrouve dans le cas du produit de deux fonctions en x et y que l'on intègre sur un rectangle. Donc par la formule du cas particulier de Fubini, on a

$$\begin{aligned}
I &= 4\int_{-1}^{1} e^{3x}\ dx \quad . \quad \int_{-1}^{1} \mathrm{ch}(y)\ dy \\
&= 4\,\frac{e^3 - e^{-3}}{3} \quad . \quad (\mathrm{sh}(1) - \mathrm{sh}(-1)) \\
&= \frac{16}{3}\,\mathrm{sh}(3).\mathrm{sh}(1)
\end{aligned}$$

Exercice 2(9pts)

On considère le domaine de $\mathbb{R}^3$ suivant :

$$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x, y \geq 0, x^2 + \cos^2(y) + z^2 \leq 2(1 + \sin y), y \leq \frac{\pi}{2}.\}.$$

On souhaite calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \iiint_\Omega xz\ dxdydz, \text{et } I_2 = \iiint_\Omega \cos y\ dxdydz.$$

1) On constate immédiatement que $F : (x,y,z) \mapsto (x,y,-z)$ définit une bijection de Ω dans Ω. De plus le jacobien de F est

$$J_F(x,y,z) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

En appliquant la formule de changement de variable qui fait apparaître $|J_F|$ on a donc $I_1 = -I_1$ et $I_2 = I_2$. On ne peut donc rien en conclure pour I_2 par contre on a $I_1 = 0$.

2) Soit $(x,y,z) \in \Omega$ alors $x^2 + z^2 \leq 2(1 + \sin y) - \cos^2 y$. En notant que $\cos^2 y = 1 - \sin^2 y$ on a donc

$$x^2 + z^2 \leq 1 + 2\sin y + \sin^2 y = (1 + \sin y)^2.$$

On en déduit le résultat.
3) En appliquant Fubini partiel on a donc

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} F(y)dy, \text{où } F(y) = \iint_{\Omega_y} \cos y\ dxdz.$$

4) Soit y fixé. Le domaine Ω_y est un demi-disque de rayon $(1+\sin y)$. En utilisant le changement de variables en polaire $(x,z) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$, où $r \in [0, 1+\sin y]$ et $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ on obtient

$$F(y) = \iint_{[0,1+\sin y]\times[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]} \cos y \ r \ drd\theta.$$

En appliquant le cas particulier de Fubini, puisque $\cos y$ est une constante

$$\begin{aligned} F(y) &= \cos y \int_0^{1+\sin y} r \ dr. \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1 \ d\theta \\ &= \frac{\pi}{2}\cos y \ (1+\sin y)^2. \end{aligned}$$

5)On en déduit que

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\pi}{2}\cos y(1+\sin y)^2 dy \\ &= \left[\frac{\pi}{6}(1+\sin y)^3\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{7\pi}{6}. \end{aligned}$$

Questions subsidiaires

On remarque que le domaine peut s'écrire par exemple

$$\Omega = \{(x,y), 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1-x\}.$$

En appliquant Fubini on a donc

$$\begin{aligned} J &= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} e^{3x}\mathrm{ch}(y)dy\right) dx, \\ &= \int_0^1 e^{3x}\big(\mathrm{sh}(1-x) - \mathrm{sh}(0)\big)dx, \\ &= \int_0^1 \frac{e^{2x+1} - e^{4x-1}}{2} dx, \\ &= \frac{e^3 - e}{4} - \frac{e^3 - e^{-1}}{8}, \\ &= \frac{e^3 - e}{8} - \frac{\mathrm{sh}(1)}{4} \ \text{(si l'on préfère cette écriture à la précédente).} \end{aligned}$$