Université de Cergy-Pontoise **2008-2009**
S4 MI/M/MP/MP-ENSI/PC-ENSI

Voici les deux sujets posés en contrôle continu.

Contrôle continu d'Intégration
Sujet 1
Durée 1h00

Les calculatrices et les documents sont interdits

Dans les exercices, on pourra admettre les résultats d'une question pour faire les questions suivantes.
(Le barême est donné à titre indicatif, il est susceptible de changer).

Question de cours (4pts)

Enoncer la propriété donnant le résultat de continuité d'une intégrale généralisée dépendant d'un paramètre.

Exercice 1(11pts)

On souhaite étudier la fonction définie pour $x \in]0, \frac{1}{2}]$ par

$$F(x) = \int_0^1 \frac{-1+2x+s(2-3x)}{1-\big(-1+2x+s(2-3x)\big)^2}(2-3x)ds.$$

1)(2pts) On pose $f(x,s) = \dfrac{-1+2x+s(2-3x)}{1-\big(-1+2x+s(2-3x)\big)^2}(2-3x)$.

a) Montrer que pour tout $s \in [0,1]$ et $x \in [0, \frac{1}{2}]$,

$$-1+2x \leq -1+2x+s(2-3x) \leq 1-x.$$

b) En déduire que f est définie sur $[0, \frac{1}{2}] \times]0, 1[$.

c) Montrer que pour tout $x \in]0, \frac{1}{2}]$, $F(x)$ est une intégrale classique mais que $F(0)$ est une intégrale généralisée.

2)(2pts) En utilisant les résultats des intégrales classiques dépendant d'un paramètre, montrer que F est une fonction de classe C^1.

3)(2pts) Etudier la convergence de l'intégrale $F(0)$.

4)(5pts) On se propose de calculer explicitement F pour montrer qu'elle admet une limite quand x tend vers 0.

a) En effectuant un changement de variable, montrer que pour tout $x \in]0, \frac{1}{2}]$,

$$F(x) = \int_{-1+2x}^{1-x} \frac{t}{1-t^2}dt.$$

b) Calculer explicitement F pour tout $x \in]0, \frac{1}{2}]$.
c) En déduire la valeur de

$$\lim_{x \to 0^+} \int_{-1+2x}^{1-x} \frac{t}{1-t^2} dt.$$

d) Peut-on en conclure que $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{t}{1-t^2} dt$ converge ?

Exercice 2

Partie I : (5pts)

1)(2pts) Rappeler le résultat sur les sommes de Riemann.

2)(3pts) Pour tout n fixé, on se donne une famille $(y_k)_{0 \leq k \leq n-1}$ telle que $y_k \in]\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}[$. On pose alors :

$$U_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n(1+y_k)}.$$

a) Montrer que la suite (U_n) est une somme de Riemann dont on précisera les éléments caractéristiques.
b) En déduire la convergence de la suite (U_n) et préciser sa limite.

Partie II : Questions subsidiaires
On souhaite étudier la suite définie par :

$$\forall n \geq 1, \quad S_n = \sum_{k=n}^{2n-1} \sin\left(\frac{1}{k}\right).$$

On rappelle que pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$,

$$x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x.$$

1) Montrer que pour tout $1 \leq n$ et pour tout $0 \leq k \leq n-1$,

$$\frac{1}{n+k+1} \leq \sin\left(\frac{1}{n+k}\right) \leq \frac{1}{n+k}.$$

2) En déduire que pour tout $1 \leq n$ fixé, pour tout $0 \leq k \leq n-1$, il existe $y_k \in]\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}[$ tel que

$$n \sin\left(\frac{1}{n+k}\right) = \frac{1}{1+y_k}.$$

3) En déduire que la suite (S_n) est convergente et donner sa limite.

Contrôle continu d'Intégration
Sujet 2
Durée 1h00
Les calculatrices et les documents sont interdits

Dans les exercices, on pourra admettre les résultats d'une question pour faire les questions suivantes.
(Le barême est donné à titre indicatif, il est susceptible de changer).

Exercice 1(11pts)

Soit le domaine Ω de $\mathbb{R}^2$, tel que $(u,v) \in \Omega$ si et seulement si

$$u, v \in [e^{-2}; e^2]$$
$$\sqrt{uv}, \sqrt{\frac{u}{v}} \in [e^{-1}, e]$$

On souhaite calculer l'intégrale double suivante

$$I = \iint_\Omega (u+v)\ dudv.$$

1)(3pts) Enoncer la formule de changement de variables.

2) On définit la fonction suivante :

$$\begin{array}{rccl} F: & [-1,1]^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \longmapsto & (e^{x+y}, e^{x-y}). \end{array}$$

a)(2pts) Vérifier que F est injective et à valeurs dans Ω.
b)(1pt) Montrer que F définit une bijection dans Ω.
c)(2pts) Calculer le jacobien de F.

3)(3pts) En utilisant le changement de variables donné par F, calculer I.(On précisera le nom des outils employés).
On pourra montrer (ou utiliser) que

$$I = 4 \iint_{[-1,1]^2} e^{3x} \mathrm{ch}(y) dxdy.$$

Exercice 2(9pts)

On considère le domaine de $\mathbb{R}^3$ suivant :

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x, y \geq 0, x^2 + \cos^2(y) + z^2 \leq 2(1 + \sin y), y \leq \frac{\pi}{2}.\}.$$

On souhaite calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \iiint_\Omega xz\ dxdydz, \text{et } I_2 = \iiint_\Omega \cos y\ dxdydz.$$

1)(3pts) Etudier le changement de variables donné pour tout $(x, y, z) \in \Omega$ par

$$(u, v, w) = (x, y, -z).$$

Que se passe-t-il dans I_1 et I_2 ? Peut-on en déduire quelque chose pour I_1 ou I_2 ?

2)(1pt) Montrer que $\Omega = \{(x, y, z), 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}, (x, z) \in \Omega_y\}$ où

$$\Omega_y = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2, x \geq 0, x^2 + z^2 \leq (1 + \sin y)^2\}.$$

3)(1pt) En déduire que

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} F(y)\ dy, \text{ où } F(y) = \iint_{\Omega_y} \cos y\ dxdz.$$

(On précisera le nom du théorème employé).

4)(3pts) Soit y fixé. En utilisant un changement de variables en polaire de la forme
$(x, z) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$, montrer qu'il existe une constante k que l'on précisera telle que

$$F(y) = k \cos y(1 + \sin y)^2.$$

(On précisera le domaine de (r, θ) et le nom des outils employés).

5)(1pt) Calculer I_2.

Question subsidiaire

Calculer l'intégrale double suivante :

$$J = \iint_\Omega e^{3x} \mathrm{ch}(y) dxdy,$$

où $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x, y \geq 0, x + y \leq 1\}$