Université de Cergy-Pontoise **2008-2009**
S4 MI/M/MP/MP-ENSI/PC-ENSI/EISTI

Examen d'Intégration

Seconde session

Durée 2h00

Les calculatrices et les documents sont interdits

Dans tout le sujet, on pourra admettre les résultats d'une question pour faire les questions suivantes.
(Le barème est donné à titre indicatif, il est susceptible de changer).

Exercice 1 : Intégrales curvilignes (6pts)

Soit $\Gamma = \{(x,y), x > 0, |y| \leq 2, (x-1)^2 - 3y^2 = 1\}$. On note les deux points suivants $A = (3,-1)$ et $B = (3,1)$.
1)(1.5pts) Etude de Γ.
a) Donner la nature de Γ.
b) Dessiner Γ (On placera les points A et B).

2)(1.5pts) Une paramètrisation de Γ.
a)Vérifier qu'il existe deux constantes a et b telles que pour tout $t \not\equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$, les points $M(t)$ de coordonnées $(x(t), y(t)) = \left(\frac{a}{\cos t} + 1, b\tan t\right)$, vérifient

$$(x(t)-1)^2 - 3y(t)^2 = 1.$$

b) En déduire une paramètrisation de Γ allant de A à B (On rappelle que $\cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$).

3)(3pts) Calculer l'intégrale curviligne suivante

$$I = \int_{\Gamma_{A\to B}} \frac{1}{x-1}\ dx + \frac{y}{x-1}\ dy.$$

Exercice 2 : Intégrales multiples (7pts)

Soit $\Omega = \{(x,y), x, y \geq 0, 4xy + 2x + 2y \leq 3\}$. On souhaite calculer l'intégrale suivante

$$I = \iint_{\Omega} \frac{2x+1}{(2y+1)^3}\ dxdy.$$

1)(1.5pts) Soit F l'application définie sur Ω par

$$\begin{array}{rccl} F: & \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \longmapsto & \left(x + \frac{1}{2}, \dfrac{1}{y+\frac{1}{2}}\right) \end{array}$$

a) Montrer que F est injective.

b) Montrer que si $(u,v) = F(x,y)$ alors $\frac{1}{2} \leq u \leq v \leq 2$.

Indication : On pourra exprimer $\frac{u}{v}$ en fonction de x et y.

c) Montrer que F définit une bijection de Ω dans $\Omega' = \{(u,v), \frac{1}{2} \leq u \leq v \leq 2\}$.

2)(1.5pts) Enoncer la formule de changement de variables.

3)(1.5pts) En appliquant le changement de variable donné par F, montrer qu'il existe une constante k telle que

$$I = k \iint_{\Omega'} uv \; dudv$$

4)(2.5pts) Calcul de I.

a)Dessiner le domaine Ω'.

b) En appliquant Fubini, calculer I. (On exprimera le domaine Ω' sous une forme permettant d'appliquer le théorème).

Exercice 3 : Intégrales généralisées (7pts)

On souhaite étudier quand elle existe, la fonction définie par

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{xe^{-t}}{t} - \frac{\sin(xt)}{t^2} \right) \; dt$$

1)(3pts) Montrer que pour tout $x \geq 0$ fixé, l'intégrale $F(x)$ est convergente.

2)(3pts) Soit $K > 0$ un réel fixé.

a) Montrer que $G : x \mapsto \displaystyle\int_1^{+\infty} \left(\frac{xe^{-t}}{t} - \frac{\sin(xt)}{t^2} \right) \; dt$ est continue sur $[0, K]$.

b) Montrer que pour tout $u > 0$,

$$u - \frac{u^2}{2} \leq \sin u \leq u$$
$$1 - u \leq e^{-u} \leq 1$$

c) En déduire que $H : x \mapsto \displaystyle\int_0^{1} \left(\frac{xe^{-t}}{t} - \frac{\sin(xt)}{t^2} \right) \; dt$ est continue sur $[0, K]$.

3)(1pt) Montrer que F est définie et continue sur $\mathbb{R}$.