Université de Cergy-Pontoise **2008-2009**
S4 MI/M/MP/MP-ENSI

Examen d'Intégration
Durée 3h00
Les calculatrices et les documents sont interdits

Dans les exercices, on pourra admettre les résultats d'une question pour faire les questions suivantes.
(Le barême est donné à titre indicatif, il est susceptible de changer).

Exercice 1 : Intégrale curviligne (7pts)

On note pour tout $R > 0$, $\mathcal{C}_R = \{(x,y), x^2+y^2 = R^2\}$, le cercle de centre $(0,0)$ et de rayon R. On note $\mathcal{C}_R^+$ ce cercle parcouru dans le sens trigonométrique. On définit $\Gamma_1 = \{(x,y), 4x^2+y^2 = 1\}$ une courbe de $\mathbb{R}^2$ et on note Γ_1^+ cette courbe parcourue dans le sens trigonométrique.
On considère le domaine suivant :

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 1-3x^2 \leq x^2+y^2 \leq 4\}.$$

On note Γ^+ le bord de Ω orienté dans le sens positif.
Soit ω la forme différentielle définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ par

$$\omega = \frac{-y}{4x^2+y^2}dx + \frac{x}{4x^2+y^2}dy$$

On se propose de calculer les intégrales curvilignes suivantes, $I_R = \displaystyle\int_{\mathcal{C}_R^+} \omega$.

1) (1.5pts) Etude de Ω.
  a) Rappeler la nature de Γ_1.
  b) Dessiner sur une même figure Γ_1, $\mathcal{C}_2$ et Ω.
2)(2pts) Calcul de $J = \displaystyle\int_{\Gamma_1^+} \omega$.
  a) Donner une paramétrisation de Γ_1^+.
  b) Calculer J en utilisant cette paramétrisation.
3)(2.5 pts) Calcul de $I = \displaystyle\int_{\Gamma^+} \omega$.
  a) Enoncer la formule de Green-Riemann.
  b) En appliquant Green-Riemann sur Ω, calculer I.
  c) En déduire que $I_2 = J$.
4)(1pt) En vous inspirant de la méthode précédente, montrer que $I_R = I_2$ pour tout $R > 0$.

Exercice 2 : Intégrale triple (6pts).

On souhaite calculer l'intégrale suivante

$$I = \iiint_\Omega z(4x^2+4y^2+8xy-x+y)\, dxdydz$$

où $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, 0 \leq z \leq 1, 5x^2+5y^2+6xy-z^2 \leq 1\}$.

1)(0.5pt) Montrer (en précisant le nom du ou des outils utilisés) que

$$I = \int_0^1 z.f(z)dz, \text{ où } f(z) = \iint_{\Omega_z} (4x^2+4y^2+8xy-x+y)\ dxdy,$$

avec $\Omega_z = \{(x,y), 5x^2+5y^2+6xy \leq 1+z^2\}$.
2)(4,5pts) On se propose de calculer $f(z)$ en faisant le changement de variable

$$\begin{array}{rccc} F: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \longmapsto & (2x+2y, x-y) \end{array}$$

a) Montrer que F définit une bijection de Ω_z dans $D_z = \{(X,Y), X^2+Y^2 \leq 1+z^2\}$.
b) Calculer le jacobien de F.
c) En déduire qu'il existe une constante $k \in \mathbb{R}$ telle que

$$f(z) = k \iint_{D_z} X^2 - Y\ dXdY.$$

d) En utilisant un changement de variable en polaire calculer $f(z)$.
3)(1pt) Calculer I.

Exercice 3 : Intégrale généralisée dépendant d'un paramètre (7pts)

On pose pour tout entier $n \geq 1$,

$$I_n = \int_0^{n^2} \frac{\left(1-\frac{\sqrt{x}}{n}\right)^n}{\sqrt{x}} dx.$$

1) (0.5pt) Montrer que pour tout $n > 0$ fixé, l'intégrale I_n est une intégrale convergente.
2) (2pts) On pose pour tout $n \geq 1$

$$f_n(x) = \begin{cases} \left(1-\frac{\sqrt{x}}{n}\right)^n & \text{si } 0 \leq x \leq n^2 \\ 0 & \text{si } x \geq n^2 \end{cases}$$

On va montrer que la suite de fonctions (f_n) converge simplement.
Soit $x \in [0,+\infty[$ un réel fixé. On étudie la suite $(f_n(x))$.
a) Montrer que la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $f(x) = e^{-\sqrt{x}}$.
b) En admettant que la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante, comparer $f_n(x)$ et $f(x)$.

3) (2.5pts) Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(x)}{\sqrt{x}} dx$ est une intégrale convergente et calculer sa valeur (on pourra faire une recherche de primitive).
4)(2pts) Montrer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite convergente dont on précisera la limite. (On donnera le nom du théorème employé).