Université de Cergy-Pontoise **2008-2009**
S4 MI/M/MP/MP-ENSI

Examen d'Intégration
Idée de correction

Exercice 1 : Intégrale curviligne (7pts)

On note pour tout $R > 0$, $\mathcal{C}_R = \{(x,y), x^2 + y^2 = R^2\}$, le cercle de centre $(0,0)$ et de rayon R. On note $\mathcal{C}_R^+$ ce cercle parcouru dans le sens trigonométrique. On définit $\Gamma_1 = \{(x,y), 4x^2 + y^2 = 1\}$ une courbe de $\mathbb{R}^2$ et on note Γ_1^+ cette courbe parcourue dans le sens trigonométrique.
On considère le domaine suivant :

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 1 - 3x^2 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

On note Γ^+ le bord de Ω orienté dans le sens positif.
Soit ω la forme différentielle définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ par

$$\omega = \frac{-y}{4x^2 + y^2}dx + \frac{x}{4x^2 + y^2}dy$$

On se propose de calculer les intégrales curvilignes suivantes, $I_R = \int_{\mathcal{C}_R^+} \omega$.

1) (1.5pts) Etude de Ω.
a) On reconnait en Γ_1, une ellipse de centre $(0,0)$ et dont les axes sont les axes du repère.
b) On remarque que $(x,y) \in \Omega$ si et seulement si

$$1 \leq 4x^2 + y^2 \text{ et } x^2 + y^2 \leq 4.$$

Le domaine Ω est donc l'ensemble des points à l'intérieur du disque de centre $(0,0)$ et de rayon 2 qui sont à l'extérieur du domaine décrit par l'ellipse Γ_1.
2)(2pts) Calcul de $J = \int_{\Gamma_1^+} \omega$.
a) D'après le cours une paramétrisation de Γ_1^+ est donné par

$$(x(t), y(t)) = \left(\frac{1}{2}\cos(t), \sin(t)\right), t \in [-\pi, \pi](\text{ ou } [0, 2\pi]).$$

b) Si $(x,y) \in \Gamma_1$, alors $4x^2 + y^2 = 1$. Donc sur Γ_1,

$$\omega(x,y) = \frac{-y}{4x^2 + y^2}dx + \frac{x}{4x^2 + y^2}dy = -ydx + xdy$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} J &= \int_{-\pi}^{\pi} \left(-\sin t.\left(\frac{-1}{2}\sin(t)\right) + \frac{1}{2}\cos t.\cos t\right) dt, \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} dt. \end{aligned}$$

Donc $J = \pi$.
3)(2.5 pts) Calcul de $I = \int_{\Gamma^+} \omega$.
a) Dans le cours il est énoncé le théorème suivant :

Théorème 0.1 Formule de Green-Riemann
Soit Ω un ouvert borné régulier. Soit Γ son bord que l'on suppose sans point double. On note Γ^+ ce bord parcouru dans le sens positif. Alors si $\omega = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ est une forme différentielle de classe C^1

$$\int_{\Gamma^+} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_\Omega \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy.$$

b) On remarque que par les théorèmes généraux, ω est C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Pour appliquer Green-Riemann sur Ω, on commence par calculer

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} &= \left(\frac{1}{4x^2+y^2} - \frac{8x^2}{(4x^2+y^2)^2}\right) - \left(\frac{-1}{4x^2+y^2} + \frac{2y^2}{(4x^2+y^2)^2}\right) \\
&= \frac{2}{4x^2+y^2} - \frac{8x^2+2y^2}{(4x^2+y^2)^2} \\
&= \frac{2}{4x^2+y^2} - \frac{2(4x^2+y^2)}{(4x^2+y^2)^2} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Donc par Green-Riemann $I = \displaystyle\int_{\Gamma^+} \omega = \iint_\Omega 0dxdy = 0$.

c) Le bord Γ de Ω est la réunion de $\mathcal{C}_2$ et de Γ_1. Pour que le bord Γ^+ soit orienté dans le sens positif, il faut parcourir $\mathcal{C}_2$ dans le sens trigonométrique (c'est $\mathcal{C}_2^+$) alors qu'il faut parcourir Γ_1 dans le sens des aiguilles d'une montre (c'est le sens inverse à Γ_1^+). On en déduit que

$$I = \int_{\mathcal{C}_2^+} \omega - \int_{\Gamma_1^+} \omega.$$

On en déduit que $I_2 = J$.
4)(1pt) Pour tout $R > 0$, si on considère l'anneau Ω_R constitué par l'ensemble des points compris entre $\mathcal{C}_R$ et $\mathcal{C}_2$, on obtient de même que l'intégrale curviligne sur le bord orienté dans le sens positif de Ω_R est nul et donc $I_R = I_2$ pour tout $R > 0$.

Exercice 2 : Intégrale triple (6pts).

On souhaite calculer l'intégrale suivante

$$I = \iiint_\Omega z(4x^2 + 4y^2 + 8xy - x + y)\ dxdydz$$

où $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, 0 \leq z \leq 1, 5x^2 + 5y^2 + 6xy - z^2 \leq 1\}$.

1)(0.5pt) On remarque que $\Omega = \{(x,y,z), 0 \leq z \leq 1, (x,y) \in \Omega_z\}$ où $\{(x,y), 5x^2 + 5y^2 + 6xy \leq 1 + z^2\}$. Donc en appliquant la formule de Fubini partielle on a :

$$I = \int_0^1 z.f(z)dz,\ \text{ où } f(z) = \iint_{\Omega_z} (4x^2 + 4y^2 + 8xy - x + y)\ dxdy.$$

2)(4,5pts) On se propose de calculer $f(z)$ en faisant le changement de variable

$$\begin{array}{rccc}
F: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\
 & (x,y) & \longmapsto & (2x+2y, x-y)
\end{array}$$

a) Il est facile de voir que F définie une bijection de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ soit en résolvant le système

$$\begin{cases} 2x + 2y = X \\ x - y = Y \end{cases}$$

Soit en remarquant que F est une application linéaire dont le déterminant vaut $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -4$ qui est non nul.
Enfin en posant $(X, Y) = (2x + 2y, x - y)$, on remarque que $5x^2 + 5y^2 + 6xy = X^2 + Y^2$. Donc $(x, y) \in \Omega_z$ si et seulment si $(X, Y) \in D_z = \{(X, Y), X^2 + Y^2 \leq 1 + z^2\}$. On en déduit bien le résultat.

b) Le calcul des dérivées partielles nous donne

$$J_F(x, y) = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Donc $J_F(x, y) = -4$.

c) On remarque que si $(X, Y) = (2x+2y, x-y)$, alors $X^2-Y = 4x^2+4y^2+8xy-x+y$. On en déduit en appliquant la formule de changement de variables :

$$\begin{aligned} \iint_{D_z} X^2 - Y \; dXdY &= \iint_{\Omega_z} (4x^2 + 4y^2 + 8xy - x + y)|J_F(x, y)| \; dxdy, \\ &= 4f(z). \end{aligned}$$

On en déduit que

$$f(z) = \frac{1}{4} \iint_{D_z} X^2 - Y \; dXdY$$

d) On remarque que D_z est un disque de centre $(0, 0)$ et de rayon $\sqrt{1 + z^2}$. Donc en faisant un changement de variable en polaire on a

$$f(z) = \frac{1}{4} \iint_{[0,\sqrt{1+z^2}]\times[-\pi,\pi]} (r^2 \cos^2 \theta - r \sin \theta) r \; dr d\theta$$

En utilisant la cas particulier de Fubini, on a

$$\begin{aligned} \iint_{[0,\sqrt{1+z^2}]\times[-\pi,\pi]} r^3 \cos^2 \theta \; dr d\theta &= \int_0^{\sqrt{1+z^2}} r^3 \; dr \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 \theta \; d\theta, \\ &= \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^{\sqrt{1+z^2}} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 + \cos(2\theta)}{2} \; d\theta \\ &= \frac{\pi}{4}(1 + z^2)^2. \end{aligned}$$

De même on a aussi

$$\begin{aligned} \iint_{[0,\sqrt{1+z^2}]\times[-\pi,\pi]} r^2 \sin \theta \; dr d\theta &= \int_0^{\sqrt{1+z^2}} r^2 \; dr \int_{-\pi}^{\pi} \sin \theta \; d\theta, \\ &= \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^{\sqrt{1+z^2}} .0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

3)(1pt) En utilisant la question 1) on a donc

$$\begin{aligned} I &= \frac{\pi}{16} \int_0^1 (1 + z^2)^2 z \; dz \\ &= \frac{\pi}{16} \left[\frac{(1 + z^2)^3}{6}\right]_0^1, \\ &= \frac{7\pi}{96}. \end{aligned}$$

Exercice 3 : Intégrale généralisée dépendant d'un paramètre (7pts)

On pose pour tout entier $n \geq 1$,

$$I_n = \int_0^{n^2} \frac{\left(1 - \frac{\sqrt{x}}{n}\right)^n}{\sqrt{x}} dx.$$

1) (0.5pt) Soit n un entier fixé. L'intégrale I_n est généralisée uniquement en 0. Au voisinage de 0 (par rapport à x),

$$\frac{\left(1 - \frac{\sqrt{x}}{n}\right)^n}{\sqrt{x}} \sim \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}.$$

Or $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ est de signe constant et comme $\frac{1}{2} < 1$, $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ converge (c'est une intégrale de Riemann). Donc par les résultats de comparaison, l'intégrale I_n est bien convergente.
(Rappelons que si $f \sim g$ au voisinage d'un point x_0 alors il existe un voisinage de x_0 sur lequel les fonctions sont strictement de même signe).

2) (2pts) On pose pour tout $n \geq 1$

$$f_n(x) = \begin{cases} \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{n}\right)^n & \text{si } 0 \leq x \leq n^2 \\ 0 & \text{si } x \geq n^2 \end{cases}$$

Soit $x \in [0, +\infty[$ un réel fixé.

a) Il existe n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, $x \leq n^2$. Donc pour tout $n \geq n_0$, $f_n(x) = \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{n}\right)^n$. On en déduit que

$$\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = \lim_{n \to +\infty} \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{n}\right)^n.$$

Or $\left(1 - \frac{\sqrt{x}}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{\sqrt{x}}{n}\right)\right)$.
Pour étudier cette limite on va utiliser un DL à l'ordre 1, (attention, l'utilisation d'un équivalent demande des précautions car en général on ne peut passer à l'exponentielle). On sait que $\ln\left(1 - \frac{\sqrt{x}}{n}\right) = \frac{-\sqrt{x}}{n} + o(\frac{1}{n})$ quand n tend vers l'infini, on en déduit que $n \ln\left(1 - \frac{\sqrt{x}}{n}\right) = -\sqrt{x} + o(1)$ et par continuité de l'exponentielle que $\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = e^{-\sqrt{x}}$.

b) Si on admet que la suite $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante, on a donc pour tout p, $f_n(x) \leq f_{n+p}(x)$ et donc en faisant tendre p vers ∞, on obtient $f_n(x) \leq f(x)$.

3) (2.5pts) Pour tout $A > \varepsilon > 0$ fixés, on a

$$\int_\varepsilon^A \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = \left[-2e^{-\sqrt{x}}\right]_\varepsilon^A = 2e^{-\sqrt{\varepsilon}} - 2e^{-\sqrt{A}}$$

En faisant tendre ε vers 0 avec A fixé, la limite existe bien donc l'intégrale est convergente en 0. De même en $+\infty$ et on a donc

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(x)}{\sqrt{x}} dx = 2$$

4)(2pts) On a par la question 2)a) que $\left(\frac{f_n}{\sqrt{\cdot}}\right)$ converge simplement vers la fonction $x \mapsto \frac{f(x)}{\sqrt{x}}$.

Grâce au 2)b), pour tout x, $\left|\frac{f_n(x)}{\sqrt{x}}\right| \leq \frac{f(x)}{\sqrt{x}}$ (car f_n est positive).

Enfin on a montré au 3) que $\int_0^{+\infty} \frac{f(x)}{\sqrt{x}} dx$ converge.

Par le théorème de convergence dominée on en déduit que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\int_0^{+\infty} \frac{f(x)}{\sqrt{x}} dx = 2$.