Université de Cergy-Pontoise **2007-2008**
S4 MI/M/MP/MP-ENSI/PC-ENSI

Voici les 2 sujets posés en contrôle continu.

Contrôle continu d'Intégration
Sujet 1
Durée 1h00

Les calculatrices et les documents sont interdits

Dans l'exercice, on pourra admettre les résultats d'une question pour faire les questions suivantes.
(Le barême est donné à titre indicatif, il est susceptible de changer).

Question de cours (3pts)

Donner en fonction des valeurs de α et β la nature des intégrales généralisées suivantes :

$$J_{\alpha,\beta} = \int_2^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha \ln^\beta(t)} dt.$$

Exercice

On souhaite étudier la fonction G définie par :

$$\forall x > 0, G(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{E(t) + 1 - t}{x + t^2} dt,$$

où pour tout $t \in \mathbb{R}$, $E(t)$ est l'unique entier tel que $E(t) \leq t < E(t) + 1$ (c'est la partie entière).

Partie I : Un résultat de régularité (9pts)
1)(2pts) Montrer que pour tout $x > 0$, l'intégrale $G(x)$ est bien convergente.
2)(4pts) Enoncer le résultat de régularité de classe C^1 pour les intégrales généralisées dépendant d'un paramètre.
3)(3pts) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, G est de classe C^1 sur $]\varepsilon, +\infty[$. Conclure.

Partie II : Un calcul explicite de G (8pts)
1)(2pts) Montrer que pour tout $x > 0$,

$$G(x) = \lim_{N \to +\infty} \int_{-(N+1)}^{(N+1)} \frac{E(t) + 1}{x + t^2} dt.$$

2)(1pt) Peut-on en déduire que $G(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{E(t) + 1}{x + t^2} dt$?
3)(2pts) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_{-(n+1)}^{-n} \frac{E(t) + 1}{x + t^2} dt + \int_n^{(n+1)} \frac{E(t) + 1}{x + t^2} dt = \int_n^{(n+1)} \frac{1}{x + t^2} dt.$$

4)(3pts) En déduire que $G(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x+t^2} dt$ et calculer explicitement G.

Contrôle continu d'Intégration

sujet 2

Les calculatrices et les documents sont interdits

Dans les exercices, on pourra admettre les résultats d'une question pour faire les questions suivantes.
(Le barême est donné à titre indicatif, il est susceptible de changer).

Exercice 1(7pts)

On veut calculer l'intégrale triple suivante

$$I = \iiint_\Omega \frac{\cos z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\, dxdydz,$$

où Ω est la demi-coque suivante $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, z \geq 0, \dfrac{\pi^2}{4} \leq x^2+y^2+z^2 \leq \pi^2\}$.
1) (3pts) Donner un changement de variables en coordonnées sphériques, en précisant le domaine des nouvelles coordonnées et en rappelant le jacobien correspondant.
2) (4pts) Calculer I en faisant un changement de variables en coordonnées sphériques. On donnera le nom des théorèmes utilisés mais sans les énoncer.
(on pourra remarquer que la fonction $f(t) = a\cos t.\cos(a\sin t)$ est de la forme $u'.(v' \circ u)$).

Exercice 2(13pts)

On souhaite calculer l'intégrale suivante

$$I = \iint_{\Omega_1} \left(\frac{u}{2}+v\right)\left(\frac{u^2}{4}-v^2\right) e^{\,(\frac{u}{2}+v)^2(\frac{u^2}{4}-v^2)} dudv,$$
$$\text{où } \Omega_1 = \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2, \frac{|u|}{2}+|v| \leq 1\right\}.$$

Pour cela on propose le changement de variable suivant $u = x+y$ et $v = \dfrac{x-y}{2}$.
On définit donc la fonction suivante

$$\begin{array}{rccc} F: & [-1;1]^2 & \longrightarrow & \Omega_1 \\ & (x,y) & \longmapsto & \left(x+y, \dfrac{x-y}{2}\right). \end{array}$$

1) (2pts) Enoncer le théorème de changement de variables (en dimension 2).
2) (2pts) Montrer que F est une bijection de $[-1;1]^2$ dans Ω_1.

3) (2pts) Calculer le jacobien de F pour tout $(x, y) \in [-1; 1]^2$.
4) (2pts) Montrer qu'il existe une constante K que l'on précisera telle que

$$I = K \iint_{[-1;1]\times[-1;1]} x^2 y e^{x^3 y} dx dy.$$

5) (2pts) Enoncer le théorème de Fubini en dimension 2 (uniquement dans un sens).
6) (3pts) Calculer I (on intégrera d'abord par rapport à x).