Examen d'Intégration

Seconde session

Durée 2h00

Les calculatrices et les documents sont interdits

Dans tout le sujet, on pourra admettre les résultats d'une question pour faire les questions suivantes.
(Le barème est donné à titre indicatif, il est susceptible de changer).

Le but de ce sujet est l'étude de la fonction définie pour tout $x > 0$ par

$$F(x) = \int_1^{+\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{t}{x}\right) \frac{x}{t^2} dt$$

On rappelle que la fonction arctg est définie sur $\mathbb{R}$, impaire, et tend vers $\frac{\pi}{2}$ au voisinage de $+\infty$.

Partie I : Etude de F (8pts).

1)(1pt) Vérifier que $F(x)$ est bien une intégrale convergente pour tout $x \in]0, +\infty[$.
2)(1pt) Montrer que, pour tout $A > 0$, F est continue sur $]0, A[$.
3)(2pts) Etude locale au voisinage de 0.
a) Montrer que $\lim_{x \to 0^+} F(x) = 0$. On prolonge alors F par continuité et on pose $F(0) = 0$.
b) Montrer que $\lim_{x \to 0^+} \frac{F(x) - F(0)}{x} = \frac{\pi}{2}$. Que peut-on déduire ?
4)(3pts) Calcul de la dérivée de F.
a) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, F est C^1 sur $[\varepsilon, +\infty[$ et donner une expression intégrale de sa dérivée.
b) Montrer en faisant une intégration par partie, que pour tout $x > 0$,

$$\int_1^{+\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{t}{x}\right) \frac{1}{t^2} dt = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right) + \int_1^{+\infty} \frac{1}{1 + \frac{t^2}{x^2}} \cdot \frac{1}{xt} dt.$$

c) En déduire que pour tout $x > 0$, $F'(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right)$.
5)(1pt) En déduire que pour tout $x \in [0, +\infty[$,

$$F(x) = \int_0^x \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{t}\right) dt.$$

Partie II : Une autre expression de F (5pts).

On considére le demi-disque $B^+(0,R) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, y \geq 0, x^2+y^2 \leq R^2\}$. On considére la forme différentielle suivante

$$\omega = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) dx + 0dy.$$

On note Γ_R^+ le bord de $B^+(0,R)$ orienté dans le sens positif.

1)(2pts) Dessiner $B^+(0,R)$ et proposer un paramétrage de Γ_R^+ (On pourra séparer Γ_R^+ en deux morceaux et proposer un paramétrage de chaque morceau).
2)(1pt) Si $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [a,b]$, est un paramétrage d'une courbe Γ joignant les points A et B, exprimer

$$\int_\Gamma P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

3)(2pts) Montrer en utilisant une paramétrisation de Γ_R^+ que pour tout $R > 0$,

$$F(R) = \frac{1}{2}\int_{\Gamma_R^+} \omega + R \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{R}\right).$$

Partie III : Calcul de F (7pts).

1)(2pts) Enoncer la formule de Green-Riemann.
2)(1pt) En admettant que l'on puisse appliquer la formule à ω, montrer que

$$\int_{\Gamma_R^+} \omega = \iint_{B^+(0,R)} \frac{y}{(1+x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} dxdy.$$

3)(1pt) Enoncer une formule de changement de variables en polaires.
4)(2pts) En déduire que

$$\int_{\Gamma_R^+} \omega = \int_0^R \frac{2r}{1+r^2} dr.$$

5)(1pt) Calculer $F(R)$ pour tout $R > 0$.