Université de Cergy-Pontoise **2007-2008**
S4 MI/M/MP/MP-ENSI/PC-ENSI

Examen d'Intégration

Durée 3h00

Les calculatrices et les documents sont interdits

Dans les exercices, on pourra admettre les résultats d'une question pour faire les questions suivantes.
(Le barême est donné à titre indicatif, il est susceptible de changer).

Exercice 1 : Intégrale curviligne (7pts)

On considère le domaine suivant :

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 2x^2 - 1 \leq y^2 \leq x\}.$$

On note Γ^+ le bord de Ω orienté dans le sens positif.
1) (2pts) Etude de Ω.
a) Donner la nature des deux domaines suivants :

$$\Gamma_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 2x^2 - y^2 = 1\} \text{ , } \Gamma_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x = y^2\}.$$

b) Dessiner Γ_1, Γ_2 et Ω sur une même figure (avec $(x, y) \in [-1, 2] \times [-2, 2]$).

On se propose de calculer l'intégrale suivante :

$$I = \iint_{\Gamma^+} xdx + yx^2dy.$$

2) (1pt) Montrer que $I_1 = \displaystyle\int_{\Gamma^+} xdx + 0dy = 0$.
3) (4pts) On en déduit que $I = \displaystyle\int_{\Gamma^+} 0dx + yx^2dy$.
a) Enoncer la formule de Green-Riemann.
b) En déduire qu'il existe une fonction f que l'on précisera telle que

$$I = \iint_{\Omega} f(x, y)dxdy.$$

c) Que se passe-t-il si on fait le changement de variables $u = x$ et $v = -y$?
d) Calculer I. On pourra éventuellement utiliser, en le justifiant, que

$$I = \int_{-1}^{1} \left(\int_{y^2}^{\sqrt{\frac{y^2+1}{2}}} -2xydx \right) dy.$$

Exercice 2 : Intégrale triple (7pts).

On souhaite calculer l'intégrale suivante

$$J = \iiint_{\Omega} z^2 dxdydz$$

où $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, y \geq 0, 2 \leq \sqrt{x^2+y^2}, (2-\sqrt{x^2+y^2})^2 + z^2 \leq 1\}$.
1)(2.5pts) On propose de faire le changement de variable

$$\begin{array}{llll} F: & [0,1]\times[0,\pi]\times[-\pi,\pi] & \longrightarrow & \Omega \\ & (r,\theta,\varphi) & \longmapsto & ((2+r\cos\varphi)\cos\theta, (2+r\cos\varphi)\sin\theta, r\sin\varphi) \end{array}$$

a) Montrer que F est bien une bijection.
b) Calculer le jacobien de F.
2) (1.5pt) Si on note $\Omega' = [0,1]\times[0,\pi]\times[-\pi,\pi]$, justifier que

$$J = \iiint_{\Omega'} 2r^3 \sin^2\varphi drd\theta d\varphi + \iiint_{\Omega'} r^4 \sin^2\varphi \cos\varphi drd\theta d\varphi.$$

3)(3pts) Calculer J (on précisera sans les énoncer le nom des théorèmes utilisés).

Exercice 3 : Intégrale généralisée dépendant d'un paramètre (6pts)

On cherche à définir pour $x \in \mathbb{R}$

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt^2)}{t} dt.$$

1) (0.5pt) F est-elle définie pour $x = 0$?
2) (1pt) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $G(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(xt^2)}{t} dt$ est bien définie.
3) (2.5pts) Montrer que pour tout $x \neq 0$, $H(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(xt^2)}{t} dt$ est une intégrale convergente. On pourra utiliser une intégration par partie et montrer que pour tout $x \neq 0$,

$$H(x) = \frac{\cos(x)}{2x} - \int_1^{+\infty} \frac{\cos(xt^2)}{t^3} dt.$$

4) (2pts)Montrer que quand x tend vers 0, $x \mapsto xF(x)$ admet une limite que l'on précisera. (Il vous faudra justifier avec rigueur l'existence de cette limite).