Université de Cergy-Pontoise **2006-2007**
S4 MI/M/MP/MP-ENSI/PC-ENSI

Voici un bref corrigé des contrôles continus

Corrigé et barème

Sujet 1

Question de cours(4pts)

Le théorème de convergence dominée.
• On se donne une suite de fonctions f_n continues par morceaux sur tout segment de I.
• On suppose que f_n converge simplement vers une fonction f continue par morceaux sur tout segment de I.
• Il existe une fonction g telle que

$$\forall t \in I, \forall n \in \mathbb{N} |f_n(t)| \leq g(t) \text{ et } \int_a^b g(t)dt \text{ est convergente },$$

• alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_a^b f_n(t)dt$ est une intégrale convergente ainsi que $\mathcal{I} = \displaystyle\int_a^b f(t)dt$ et la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\mathcal{I}$.

Exercice 1(3pts)

Préciser pour quelles valeurs de α l'intégrale suivante est convergente

$$I_\alpha = \int_0^1 \frac{1-\cos(t)}{t^\alpha}dt$$

La fonction $t \mapsto \dfrac{1-\cos(t)}{t^\alpha}$ est continue sur $]0,1]$ et l'intégrale est généralisée au voisinage de 0.
On a l'équivalent suivant, $\dfrac{1-\cos(t)}{t^\alpha} \sim \dfrac{1}{2(t^{\alpha-2})}$ au voisinage de 0.
On sait que $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^{\alpha-2}}dt$ est convergente si et seulement si $\alpha - 2 < 1$.
Donc I_α est convergente si et seulement si $\alpha < 3$.

Exercice 2 (13pts)

On définit la fonction F en posant pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F(x) = \int_0^1 \frac{(s-1)\sqrt{x^2+1}+2sx}{\left((s-1)\sqrt{x^2+1}+2sx\right)^2+1}(2x+\sqrt{x^2+1})ds.$$

1)(3pts) Il s'agit d'une intégrale classique dépendant d'un paramètre.
La fonction $f:(x,s) \longmapsto \dfrac{(s-1)\sqrt{x^2+1}+2sx}{\left((s-1)\sqrt{x^2+1}+2sx\right)^2+1}(2x+\sqrt{x^2+1})$ est C^1 sur

$\mathbb{R}\times[0,1]$ (ou $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est continue sur $\mathbb{R}\times[0,1]$ et $t\mapsto f(x,t)$ est continue sr $[0,1]$).
Donc F est C^1 sur $[0,1]$.
2)(3pts) On effectue le changement de variables pour x fixé $t=(s-1)\sqrt{x^2+1}+2sx$.
On a alors $dt=(2x+\sqrt{x^2+1})ds$.
Pour $s=0$ on a $t=-\sqrt{x^2+1}$ et pour $s=1$ on a $t=2x$ donc pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$F(x)=\int_{-\sqrt{x^2+1}}^{2x}\frac{t}{t^2+1}dt.$$

3)(2pts) En intégrant on obtient

$$\begin{aligned} F(x) &= \left[\frac{1}{2}\ln(t^2+1)\right]_{-\sqrt{x^2+1}}^{2x} \\ &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+4x^2}{2+x^2}\right) \end{aligned}$$

.
4)(2pts) Quand x tend vers $+\infty$ on a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1+4x^2}{2+x^2}=4$.
Donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}F(x)=\ln(2)$.
5)(3pts) L'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{t}{t^2+1}dt$ est une intégrale généralisée en $\pm\infty$.
Au voisinage de $+\infty$ (ou $-\infty$) $\dfrac{t}{t^2+1}\sim\dfrac{1}{t}$ et $t\mapsto\dfrac{t}{t^2+1}$ est continue sur $\mathbb{R}$.
Or $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{t}dt$ est divergente.
Donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{t}{t^2+1}dt$ est une intégrale divergente, il ne peut y avoir égalité.

Autre réponse possible :
Si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{t}{t^2+1}dt$ était une intégrale convergente, comme $t\mapsto\dfrac{t}{t^2+1}$ est une fonction impaire on dervait avoir $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{t}{t^2+1}dt=0$.
On devrait aussi vérifier $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{t}{t^2+1}dt=\ln(2)$ d'après la question précédente.
Ce qui est absurde.
Donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{t}{t^2+1}dt$ est une intégrale divergente et il ne peut y avoir égalité.

Contrôle continu d'Intégrations
Corrigé du sujet 2

Exercice 1(7pts)

On veut calculer l'intégrale triple suivante

$$I = \iiint_{\Omega} x \, dxdydz,$$

où Ω est la demi-sphère suivante $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x \geq 0, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.
1) Un changement de variable classique est le suivant dans Ω :

$$x = r\cos(\theta)\cos(\varphi), y = r\sin(\theta)\cos(\varphi), z = r\sin(\varphi),$$

$(r, \theta, \varphi) \in [0, 1] \times [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \times [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. On a alors le jacobien $J = r^2\cos(\varphi)$.
2) En appliquant le changement de variable et Fubini, on obtient

$$I = \int_0^1 r^3 dr. \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(\theta) d\theta. \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(\varphi) d\varphi.$$

En notant que $\cos^2(\varphi) = \dfrac{1 + \cos(2\varphi)}{2}$, on obtient donc

$$I = \frac{1}{4}.2.\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

Exercice 2(13pts)

On se propose de calculer l'intégrale suivante (énoncé corrigé)

$$I = \iint_{\Omega_1} vu^3\cos(v^2) dudv, \text{ où } \Omega_1 = \left\{(u, v) \in [0, +\infty[^2, \frac{1}{4} \leq u^4 + v^4 \leq 1\right\}.$$

Pour cela on se propose de faire le changement de variable suivant $u = \sqrt{x}\sqrt{\cos(y)}$ et $v = \sqrt{x}\sqrt{\sin(y)}$. On définit donc la fonction suivante

$$\begin{array}{rccc} F : & [\frac{1}{2}, 1] \times [0, \frac{\pi}{2}] & \longrightarrow & \Omega_1 \\ & (x, y) & \longmapsto & \big(\sqrt{x}\sqrt{\cos(y)}, \sqrt{x}\sqrt{\sin(y)}\big). \end{array}$$

1) Dans le cours il a été donné le théorème suivant

Théorème 0.1 *(***Formule de changement de variables***)*
Soit Ω un ensemble fermé, borné, quarrable du plan. Soit F une fonction définie de Ω dans Ω_1 bijective et de classe C^1. On suppose que pour tout $(x, y) \in \Omega$ $J_F(x, y) \neq 0$. On vérifie alors

$$\iint_{\Omega} f\big(F(x, y)\big)\big|J_F(x, y)\big| dxdy = \iint_{\Omega_1} f(u, v) dudv.$$

2) En calculant on trouve,

$$(\sqrt{x}\sqrt{\cos(y)})^4 + (\sqrt{x}\sqrt{\sin(y)})^4 = x^2.$$

Donc si $x \in [\frac{1}{2}, 1]$, on a bien $F(x, y) \in \Omega_1$. Si $F(x, y) = F(x', y')$, il est facile de montrer que $(x, y) = (x', y')$ donc F est injective. Si on se donne $(u, v) \in \Omega_1$, alors en posant $a = u^2$ et $b = v^2$ on sait qu'il existe un unique couple $(x, y) \in [\frac{1}{2}, 1] \times [0, \frac{\pi}{2}]$ tel que $(a, b) = (x \cos(y), x \sin(y))$ et on a bien $F(x, y) = (u, v)$ donc F est surjective.
3) Le calcul du jacobien donne

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\sqrt{\cos(y)}}{2\sqrt{x}} & \dfrac{\sqrt{x}\sin(y)}{2\sqrt{\cos(y)}} \\ \dfrac{\sqrt{\sin(y)}}{2\sqrt{x}} & \dfrac{\sqrt{x}\cos(y)}{2\sqrt{\sin(y)}} \end{vmatrix} = \frac{1}{4\sqrt{\cos(y)}\sqrt{\sin(y)}}$$

4) Il y avait une erreur d'énoncé, on trouvait

$$I = \frac{1}{4} \iint_{[\frac{1}{2},1]\times[0,\frac{\pi}{2}]} x^2 \sin(y) \cos(x \sin(y)) dx dy.$$

au lieu de

$$I = \frac{1}{4} \iint_{[\frac{1}{2},1]\times[0,\frac{\pi}{2}]} x^2 \cos(y) \cos(x \sin(y)) dx dy.$$

5) Dans le cours, Fubini a été énoncé de la manière suivante

Théorème 0.2 *(***Formule de Fubini***)*
On considère deux fonctions φ_1 et φ_2 à valeurs réelles, définies et continues sur un même intervalle $[a, b]$ telles que

$$\forall t \in [a, b], \varphi_1(t) \leq \varphi_2(t).$$

On considère le domaine

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}.$$

Alors le domaine Ω est quarrable et pour toute fonction f intégrable sur Ω on vérifie

$$\iint_\Omega f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx.$$

6) En partant de la formule donnée dans l'énoncé, on a en appliquant Fubini

$$I = \frac{1}{4} \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos(y) \cos(x \sin(y)) dy \right) dx,$$

On reconnait une expression de la forme $u' \cos(u)$ et donc en intégrant on obtient

$$I = \frac{1}{4} \int_{\frac{1}{2}}^1 x \sin(x) dx.$$

En faisant une intégration par partie on trouve

$$I = \frac{1}{4}\Big[-x\cos(x)\Big]_{\frac{1}{2}}^{1} + \frac{1}{4}\int_{\frac{1}{2}}^{1} \cos(x)dx.$$

Donc $I = \dfrac{1}{4}(\frac{1}{2}\cos(\frac{1}{2}) - \cos(1) + \sin(1) - \sin(\frac{1}{2}))$.

7) (Question subsidiaire) La fonction F n'est pas C^1 sur le domaine fermé $\Omega = [\frac{1}{2}, 1] \times [0, \frac{\pi}{2}]$, mais uniquement sur le domaine $[\frac{1}{2}, 1]\times]0, \frac{\pi}{2}[$.