Voici les 2 sujets de contrôle continu posés en 2006-2007.

Contrôle continu d'Intégrations

Durée 1h00

Les calculatrices et les documents sont interdits

Dans l'exercice, on pourra admettre les résultats d'une question pour faire les questions suivantes.
(Le barême est donné à titre indicatif, il est susceptible de changer).

Question de cours (4pts)

Enoncer le théorème de convergence dominée.

Exercice 1 (3pts)

Préciser pour quelles valeurs de α l'intégrale suivante est convergente

$$I_\alpha = \int_0^1 \frac{1-\cos(t)}{t^\alpha} dt$$

Exercice 2

On définit la fonction F en posant pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F(x) = \int_0^1 \frac{(s-1)\sqrt{x^2+1} + 2sx}{\left((s-1)\sqrt{x^2+1} + 2sx\right)^2 + 1} (2x + \sqrt{x^2+1}) ds.$$

1)(3pts) Expliquer en utilisant une propriété de cours, mais sans faire de calculs, pourquoi F est de classe C^1.
2)(3pts) En effectuant un changement de variables, montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F(x) = \int_{-\sqrt{x^2+1}}^{2x} \frac{t}{t^2+1} dt.$$

(Vous justifierez bien la formule obtenue).
3)(2pts) Donner alors une formule explicite de $F(x)$.
4)(2pts) En déduire que F admet une limite l que l'on précisera quand x tend vers $+\infty$.
5)(3pts) Peut-on en déduire que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{t^2+1} dt = l$? Vous justifierez votre réponse.

Contrôle continu d'Intégrations

Durée 1h00

Les calculatrices et les documents sont interdits

Dans les exercices, on pourra admettre les résultats d'une question pour faire les questions suivantes.
(Le barême est donné à titre indicatif, il est susceptible de changer).

Exercice 1(7pts)

On veut calculer l'intégrale triple suivante

$$I = \iiint_\Omega x \, dxdydz,$$

où Ω est la demi-sphère suivante $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x \geq 0, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.
1) (3pts) Donner un changement de variable en sphérique, en précisant les valeurs préalables de chaque nouvelle variable et en rappelant le jacobien.
2) (4pts) Calculer I en faisant un changement de variables en sphérique. On donnera le nom des théorèmes utilisés mais sans les énoncer.

Exercice 2(13pts)

On se propose de calculer l'intégrale suivante

$$I = \iint_{\Omega_1} u^3 v \cos(v^2) dudv, \text{ où } \Omega_1 = \left\{ (u, v) \in [0, +\infty[^2, \frac{1}{4} \leq u^4 + v^4 \leq 1 \right\}.$$

Pour cela on se propose de faire le changement de variable suivant $u = \sqrt{x}\sqrt{\cos(y)}$ et $v = \sqrt{x}\sqrt{\sin(y)}$. On définit donc la fonction suivante

$$\begin{array}{rccc} F: & [\frac{1}{2}, 1] \times [0, \frac{\pi}{2}] & \longrightarrow & \Omega_1 \\ & (x, y) & \longmapsto & \left(\sqrt{x}\sqrt{\cos(y)}, \sqrt{x}\sqrt{\sin(y)}\right). \end{array}$$

1) (2pts) Enoncer le théorème de changement de variables (en dimension 2).
2) (2pts) Montrer que F est une bijection de $[\frac{1}{2}, 1] \times [0, \frac{\pi}{2}]$ dans Ω_1. (On vérifiera que F est bien à valeurs dans Ω_1, qu'elle est injective et surjective).
3) (2pts) Calculer le jacobien de F pour tout $(x, y) \in [\frac{1}{2}, 1] \times]0, \frac{\pi}{2}[$.
4) (2pts) En supposant que l'on ait le droit d'utiliser la formule de changement de variables dans notre cas, montrer que

$$I = \frac{1}{4} \iint_{[\frac{1}{2}, 1] \times [0, \frac{\pi}{2}]} x^2 \cos(y) \cos(x \sin(y)) dxdy.$$

5) (2pts) Enoncer le théorème de Fubini en dimension 2 (uniquement dans un sens).
6) (3pts) En appliquant Fubini, calculer I.
7) (Question subsidiaire) La fonction F vérifiait-elle toutes les hypothèses du théorème de changement de variables ?