Université de Cergy-Pontoise **2006-2007**
S4 MI/M/MP/MP-ENSI/PC-ENSI/EISTI

Examen d'Intégration

Seconde session

Durée 2h00

Les calculatrices et les documents sont interdits

Dans les exercices, on pourra admettre les résultats d'une question pour faire les questions suivantes.
(Le barême est donné à titre indicatif, il est susceptible de changer).

Exercice 1 :Intégrale curviligne (5,5pts)

Soit Γ le chemin partant du point $A(2\sqrt{2}; -2)$ arrivant au point $B(2\sqrt{2}; 2)$ tel que $M(x; y) \in \Gamma$ si et seulement si $x^2 - y^2 = 4$ (On note (E) cette équation).

1) Préciser de quel type de courbe (E) est l'équation. Dessiner Γ.
2) Vérifier que pour tout $t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ le point $M(\frac{2}{\cos(t)}, 2\tan(t))$ vérifie l'équation (E). En déduire un paramétrage de Γ menant de A à B.
On souhaite calculer l'intégrale curviligne suivante le long de Γ :

$$I = \int_\Gamma -xydx + x^2dy.$$

3) En utilisant le paramètrage que vous avez trouvé au 2), montrer que

$$I = k\int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (1 + \tan^2(t))dt,$$

où l'on précisera la valeur de k.
4) Calculer I.

Exercice 2 :Intégrale double (6,5pts)

Soit le domaine $\Omega = \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, \ln 2], \frac{1}{2} \leq \dfrac{x}{2} + e^{-y} \leq 1\}$ on cherche à calculer

$$I = \iint_\Omega e^{(\frac{x}{2} - y + e^{-y})}dxdy.$$

1) Enoncer la formule de changement de variables en dimension 2.
2) On définit la fonction suivante

$$\begin{array}{rccl} F: & \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x, y) & \longmapsto & (u, v) = (\dfrac{x}{2} + e^{-y}, e^{-y}). \end{array}$$

a) Montrer que F est à valeurs dans $\Omega' = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2, \frac{1}{2} \leq v \leq u \leq 1\}$.
b) Montrer que F définit une bijection de Ω dans Ω'(on calculera explicitement

F^{-1} la fonction réciproque).

c) Calculer le jacobien de F. Peut-il s'annuler sur Ω ?

3) En utilisant le changement de variable donné par F, montrer que

$$I = 2 \iint_{\Omega'} e^u du dv.$$

4) Calculer I (on précisera le ou les théorèmes utilisés).

Exercice 3 : **Intégrale généralisée dépendant d'un paramètre** (8pts)

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = E(x) \sin(\pi x)$, où $x \mapsto E(x)$ est la fonction partie entière (on rappelle pour la suite du sujet que E est continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x \leq E(x) < x + 1$).

On cherche à définir et étudier la fonction suivante :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} f(x-t) e^{-t} dt$$

1) Montrer que f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $t \geq 0$, $|f(x-t)| \leq |x| + t + 1$.

2) Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. Calculer la limite suivante

$$\lim_{t \to +\infty} t^2 f(x-t) e^{-t}.$$

En déduire la nature de l'intégrale généralisée $F(x)$.

3) Soit $A > 0$. Montrer que pour tout $x \in [-A, A]$ et tout $t \geq 0$

$$|f(x-t)e^{-t}| \leq (A + t + 1)e^{-t}.$$

En déduire que F est continue sur $[-A, A]$ (on précisera le théorème utilisé et on explicitera les hypothèses vérifiées). En déduire que F est continue sur $\mathbb{R}$.

4) On admettra que f n'est pas une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. On va cependant montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$.

a) Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. En faisant le changement de variable $s = x - t$, montrer que

$$F(x) = e^{-x} \int_{-\infty}^{x} f(s) e^s ds.$$

b) En notant que $\displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(s)e^s ds = \int_{-\infty}^{0} f(s)e^s ds + \int_0^x f(s)e^s ds$, montrer que F est dérivable et calculer sa dérivée.

5) Montrer que F est solution de l'équation différentielle suivante

$$y' + y = f.$$