Université de Cergy-Pontoise **2006-2007**
S4 MI/M/MP/MP-ENSI/PC-ENSI

Examen d'Intégration

Durée 3h00

Les calculatrices et les documents sont interdits

Dans les exercices, on pourra admettre les résultats d'une question pour faire les questions suivantes.
(Le barême est donné à titre indicatif, il est susceptible de changer).

Exercice 1 :(9pts) Intégrales doubles

On considère le domaine suivant :

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 1 \leq 4x^2 + y^2 \leq 9\}.$$

1) Etude de Ω.
a) Pour $k > 0$, donner la nature du domaine, $\Gamma_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 4x^2 + y^2 = k^2\}$.
b) Dessiner Γ_1, Γ_3 et Ω sur une même figure.
c) On note $\Omega_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 4x^2 + y^2 \leq k^2\}$. Pour toute fonction continue f définie sur $\mathbb{R}^2$, exprimer $\iint_\Omega f(x, y)dxdy$ en fonction de $\iint_{\Omega_1} f(x, y)dxdy$ et $\iint_{\Omega_3} f(x, y)dxdy$.

On se propose de calculer l'intégrale suivante :

$$I = \iint_\Omega \sqrt{4x^2 + y^2}dxdy.$$

2) Calcul de $J = \iint_{\Omega_1} \sqrt{4x^2 + y^2}dxdy$.
a) Enoncer la formule de Green-Riemann.
b) Montrer que $J = \dfrac{1}{3} \displaystyle\int_{\Gamma_1^+} -y\sqrt{4x^2 + y^2}dx + x\sqrt{4x^2 + y^2}dy$
c) Donner un paramétrage de Γ_1^+.
d) Calculer J avec ce paramétrage.

3) Calcul de $K = \iint_{\Omega_3} \sqrt{4x^2 + y^2}dxdy$. (On se propose d'utiliser une autre méthode que celle pour J.)
a) Enoncer le théorème de changement de variable en dimension 2.
b) On définit $F(x, y) = (2x, y)$, montrer que F est une bijection de Ω_3 dans $B(0, 3)$, le disque de centre $(0, 0)$ et de rayon 3. Calculer le jacobien de F.
c) Montrer que $K = \dfrac{1}{2} \displaystyle\iint_{B(0,3)} \sqrt{u^2 + v^2}dudv$.

d) Enoncer la formule de changement de variable en polaire.
e) Calculer K en utilisant un changement de variables en coordonnées polaires.

4) En déduire I.

Exercice 2 :(7pts) Intégrale triple

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit les intégrales suivantes

$$I_n = \iiint_{\Omega_n} \cos(z) - \cos\left(\frac{x^2}{y}\right) dxdydz,$$

avec $\Omega_n = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, 0 < x < 1, \frac{1}{n} < y < n, 0 < yz < x^2\}$.

1) Enoncer le théorème de Fubini en dimension 3.
2) En appliquant le théorème de Fubini, montrer que

$$I_n = \int_0^1 \left[\int_{\frac{1}{n}}^n \sin\left(\frac{x^2}{y}\right) - \frac{x^2}{y}\cos\left(\frac{x^2}{y}\right) dy\right] dx.$$

3) Calculer la dérivée de $y \mapsto y \sin\left(\frac{x^2}{y}\right)$. En déduire que

$$I_n = \int_0^1 n \sin\left(\frac{x^2}{n}\right) - \frac{1}{n}\sin\left(nx^2\right) dx.$$

4) On pose $f_n(x) = n \sin\left(\frac{x^2}{n}\right) - \frac{1}{n}\sin\left(nx^2\right)$.
a) Montrer que la suite (f_n) converge simplement sur $[0, 1]$, vers une fonction que l'on précisera.
b) Montrer que la suite (I_n) admet une limite et la calculer (on pourra utiliser le fait que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|\sin(t)| \leq |t|$. On précisera le nom du théorème utilisé).

Exercice 3 :(4pts) Intégrale généralisée à paramètre.

On souhaite étudier la fonction suivante

$$F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(xt^2)}{1 + t^2} dt.$$

1) Montrer que F est définie sur $\mathbb{R}$.
2) Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}$.
3) Le théorème de dérivabilité peut-il s'appliquer ? (justifier votre réponse).