Examen d'Intégrations
Deuxième session
Durée 2h00

Les calculatrices et les documents sont interdits

Dans les exercices, on pourra admettre les résultats d'une question pour faire les questions suivantes.
(Le barême est donné à titre indicatif, il est susceptible de changer).

Exercice 1 : (7pts) Intégrales généralisées dépendant d'un paramètre.

On se propose de définir la fonction f par la relation suivante

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{(1+t^2)^2} dt.$$

1) Montrer que f est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2) Enoncer le théorème de dérivation d'une intégrale généralisée dépendant d'un paramètre.
3) Montrer que f est de classe C^1 et calculer sa dérivée.
4) En déduire que f est de classe C^2 et calculer f".
5) Vérifier que f est solution de l'équation différentielle suivante

$$f - f'' = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{1+t^2} dt.$$

Exercice 2 : (6pts) Intégrale curviligne.

Soit $\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, y \geq 0, x^2 - 2x + \frac{y^2}{4} \leq 0\right\}$. On se propose de calculer

$$I = \iint_{\Omega} 2(x+y)dxdy.$$

1) Enoncer la formule de Green-Riemann.
2) Montrer que $(x,y) \in \Omega$ si et seulement si

$$y \geq 0 \text{ et } (x-1)^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1.$$

Dessiner alors le domaine Ω.

3) On pose $\omega = (x^2 - y^2)dx + (x^2 + y^2)dy$ et on note Γ^+ le bord de Ω parcouru dans le sens positif.

a) Montrer que $I = \displaystyle\int_{\Gamma^+} \omega d\sigma$.

b) En déduire en choisissant deux paramètrages adaptés que

$$I = \int_0^{\pi} \left[(3 - 2\cos\theta - 5\cos^2\theta)\sin\theta + (4 + 4\cos\theta + 6\sin^2\theta)\cos\theta\right]d\theta + \int_0^2 t^2 dt.$$

c) Calculer I.

Exercice 3 : (7pts) Intégrales triples.

Soit $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, z \geq 0, x^2 + y^2 + z \leq 1\}$.
On veut calculer le volume de Ω, noté $V(\Omega)$.

Première méthode :

1) Enoncer le théorème de Fubini en dimension 3.

2) Montrer par Fubini que

$$V(\Omega) = \int_0^1 \left(\int_{-\sqrt{1-z}}^{\sqrt{1-z}} 2\sqrt{1 - z - x^2} dx \right) dz.$$

3) En déduire la valeur de $V(\Omega)$.

Deuxième méthode :

1) Décrire le domaine Ω en fonction des coordonées cylindriques.

2) Rappeler la formule de changement de variables en coordonnées cylindriques.

3) Montrer alors que

$$V(\Omega) = 2\pi \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-z}} r dr dz.$$

4) Retrouver la valeur de $V(\Omega)$.