Université de Cergy-Pontoise **2005-2006**
M-S4 B, Intégration

Examen Final : MI,M,MP, ENSI

Durée : 3h00

Les calculatrices et les documents sont interdits

Dans les exercices et le problème, on pourra admettre les résultats d'une question pour faire les questions suivantes.
Le barême est donné à titre indicatif, il est susceptible de changer.

Exercice 1(4pts)

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ de bord orienté dans le sens positif Γ^+. Soit ω la forme différentielle définie sur U par

$$\omega(x,y) = \left(\frac{-y}{2} - xy + \frac{y^3}{3}\right) dx + \left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{2} + xy^2\right) dy.$$

En utilisant la formule de Green-Riemann (que l'on rappelera), montrer que $\displaystyle\int_{\Gamma^+} \omega d\sigma$ est égale à l'aire de U.

Exercice 2(6pts)

On définit sur $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ la forme différentielle suivante

$$\omega(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy.$$

1) Enoncer la propriété permettant de savoir si une forme différentielle est exacte sur un ouvert.
2) Calculer pour tout $(x,y) \neq (0,0)$ $\dfrac{\partial P}{\partial y}(x,y)$ et $\dfrac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$.
3) Expliquer pourquoi on ne peut pas appliquer la propriété énoncée au 1) sur Ω.
4) Soit Γ^+ le cercle de centre $(0,0)$ et de rayon 1 parcouru dans le sens trigonométrique.

a) Calculer $\displaystyle\int_{\Gamma^+} \omega d\sigma$.

b) En déduire que ω n'est pas exacte sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Problème(10pts)

Partie I(4pts)

Soit $D = \{(t,z) \in \mathbb{R}^2, |t| + |z| \leq \frac{1}{2}\}$. On pose

$$J = \iint_D (1+t)^4 z^2 dtdz.$$

1) Dessiner le domaine D.
2) Enoncer le théorème de Fubini (dans un seul sens).
3) Par Fubini montrer que

$$J = \frac{2}{3}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (1+t)^4 (\frac{1}{2} - |t|)^3 dt.$$

4) Calculer J (on pourra séparer en deux intégrales en traitant le cas $t \geq 0$ et le cas $t \leq 0$).

Partie II(6pts)

Soit $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, y \geq 0 \text{ et } |\sqrt{x^2+y^2} - 1| + |z| \leq \frac{1}{2}\}$. On pose

$$I = \iiint_\Omega x^2 y z^2 dxdydz.$$

Enfin on définit :

$$\begin{array}{rccl} F: & [0,\pi] \times D & \longrightarrow & \Omega \\ & (\theta, t, z) & \longmapsto & \big((1+t)\cos(\theta), (1+t)\sin(\theta), z\big). \end{array}$$

1) Vérifier que F est bien à valeurs dans Ω.
2) Montrer que F définit une bijection.
3) Calculer le jacobien de F.
4) Enoncer la formule de changement de variables en dimension 3.
5) En utilisant le changement de variables donné par F, montrer que

$$I = J.\int_0^\pi \cos^2(\theta)\sin(\theta)d\theta.$$

6) En utilisant la partie I, calculer la valeur de I.