Fonctions à plusieurs variables

Examen du 11 mai 2015, durée : 3 heures

Les notes de cours ne sont pas autorisées

Sauf indication contraire, toutes les réponses doivent être justifiées

Une rédaction succincte et propre est demandée pour une note maximale

Exercice 1. (5 points) (a) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Les propriétés suivantes sont-elles équivalentes:

1. Pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$ et tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que, si $|x - x_0| \leq \delta$, alors $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.
2. Pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$ et tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que, si $|x - x_0| < \delta$, alors $|f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$.

(b) Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $K \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble fermé borné. Montrer qu'il existe $x_0 \in K$ tel que $f(x) \leq f(x_0)$ pour tout $x \in K$.

(c) Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction. Donner la définition de la différentiabilité de f en un point $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

(d) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des fonctions deux fois continûment différentiables. On définit $g(t) = f(u(t), v(t))$. Exprimer la dérivée seconde de g en termes des dérivées partielles de f et des dérivées de u et v.

Exercice 2. (5 points) Pour des entiers $\alpha > 0$ et $\beta > 0$, on définit la fonction

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^\alpha y^\beta}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Étudier la continuité et la différentiabilité de f au point $(0, 0)$ en fonction des paramètres (α, β).

Exercice 3. (5 points) (a) Énoncer le résultat concernant le développement limité à l'ordre 2 pour une fonction de deux variables $f(x, y)$ au point (x_0, y_0).

(b) Soit la fonction

$$f(x, y) = e^{x+y} - \sin y.$$

Trouver un polynôme $p(x, y)$ de degré ≤ 2 tel que

$$\frac{|f(x, y) - p(x, y)|}{(x - 1)^2 + (y - 2)^2} \to 0 \quad \text{quand } (x, y) \to (1, 2).$$

Tournez la page SVP

Exercice 4. (5 points) Soit la fonction

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 8.$$

(a) Trouver les points critiques de f.

(b) Trouver les extrema locaux de f et étudier leur nature.

(c) La fonction f, possède-t-elle un maximum ou un minimum global. Si c'est le cas, trouver la valeur maximale ou minimale de f.